فهرست

فصل ۱

ساختن فضا

قضیه ۱.۱: فرض کنید Y زیرفضای X باشد. اگر A در Y و Y در X باز باشد آنگاه A در X باز است.

اثبات: بنا بر فرض مجموعه باز B در X وجود دراد که $A = B \cap Y$. از آنجاییکه Y نیز در X باز است، $B \cap Y$ و در نتیجه A در X باز خواهد بود.

قضیه ۲.۱: فرض کنید Y زیرفضای X باشد $C \subseteq Y$. در این صورت C در Y بسته است اگر و فقط اگر مجموعه بسته F در X باشد که $C = F \cap Y$.

اثبات: ابتدا فرض کنید C در Y بسته باشد.در این صورت $Y - C$ باز و بنابر تعریف، مجموعه باز B در X وجود دارد که $Y - C = B \cap Y$. در این صورت

$$C = Y - (B \cap Y) = Y \cap B^c$$

که در آن B^c، متمم B نسبت به X است. از آنجاییکه Bدر X باز است، B^c بسته و در این حالت کافیست قرار دهیم $F = B^c$.

برعکس اگر F در X بسته و $E = F \cap Y$ آنگاه

$$Y - E = Y - (F \cap Y) = Y \cap F^c$$

و این بار از اینکه F^cدر X باز است نتیجه می‌گیریم $Y - E$ در Y باز و لذا E در Yبسته است.

قضیه ۳.۱: اگر Y زیرفضای X و $E \subseteq Y$ چنان باشد که E در Y و Yدر Xبسته باشد آنگاه E در X نیز بسته است. زیرا بنابر قضیه ۲.۱، زیرمجموعه بسته F از X وجود دارد که $E = Y \cap F$. با توجه به اینکه اشتراک دو مجموعه بسته، بسته است و بنابر فرض Y در X بسته می‌باشد نتیجه می‌گیریم E نیز در X بسته است $\square$

$$\begin{array}{rcl} [0, b) & = & Y \cap (-\frac{1}{2}, b) \\ & = & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} [0, b) & = & Y \cap (-\frac{1}{2}, b) \\ (a, 1] \cup \{3\} & = & Y \cap (a, 4) \\ (a, 1] & = & Y \cap (a, \frac{1}{2}) \\ & = & Y \cap (-\frac{1}{2}, b) \\ \{3\} & = & \end{array}$$