فهرست مطالب

فصل ۱

معادلات حاکم بر جریان ماخ پایین

۱.۱ مقدمه

این قسمت باید از مولر [۱] [۱] و دیگر مقالات آورده شود.

۲.۱ معادلات ناویر–استوکس

این معادلات شامل معادلات بقای جرم، مومنتم و انرژی می باشند. فرم دیفرانسیل معادلات ناویر–استوکس [۲] برای جریان تراکم پذیر لزج به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u_i^*)}{\partial x_i^*} = 0 \tag{۱.۱}$$

$$\frac{\partial(\rho^* u_j^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u_i^* u_j^*)}{\partial x_i^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_i^*} + \rho^* g^* \delta_{j2} \tag{۲.۱}$$

$$\frac{\partial(\rho^* E^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u_i^* H^*)}{\partial x_i^*} = \frac{\partial(\tau_{ij}^* u_j^*)}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_i^*}(k^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*}) + \rho^* g^* u_2^* \tag{۳.۱}$$

معادلهٔ ۱.۱ پیوستگی جرم، ۲.۱بقای مومنتم و ۳.۱ بقای انرژی است. در معادلات فوق

- برای پارامترهای با بعد از (*) استفاده شده است.
- فرض شده شتاب جاذبه در جهت محور دوم است.
- برای تانسور تنش برشی داریم:

[۱] Muller
[۲] Navier-Stokes

$\tau_{ij}^* = \mu^*[(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j^*}) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}\delta_{ij}]$

- انرژی کل، E^*، و انتالپی کل، H^*، در واحد جرم به صورت زیر تعریف می شود:

$E^* = e^* + \frac{1}{2}|u^*|^2$

$H^* = E^* + \frac{p^*}{\rho*}$

با فرض گاز ایده آل و کامل، معادلات حالت[۳] و کالوریک[۴] به صورت زیر می باشند:

$$p^* = \rho^* R^* T^* \tag{۴.۱}$$

$$e^* = c_v^* T^* \tag{۵.۱}$$

که در فرمولهای بالا، $R^* = c_p^* - c_v^*$ می باشد و نسبت گرماهای ویژه $\gamma^* = \frac{c_p^*}{c_v^*}$ می باشد.

۳.۱ بی بعد سازی معادلات

معادلات با بعد در ۲.۱ را با مقادیر مرجع، شریط سکون دوردست[۵]، بی بعد خواهیم کرد. این مقادیر با اندیس ∞ نشان داده خواهد شد. برای طول مرجع از L^* استفاده خواهیم کرد. مقادیر بی بعد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_\infty^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty^*}, \quad k = \frac{k^*}{k_\infty^*},$$
$$x = \frac{x^*}{L^*}, \quad t = \frac{t^*}{\frac{L^*}{u^*}}, \quad e = \frac{e^*}{\frac{p_\infty^*}{\rho^*}}, \quad E = \frac{E^*}{\frac{p_\infty^*}{\rho^*}}, \quad H = \frac{H^*}{\frac{p_\infty^*}{\rho^*}} \tag{۶.۱}$$

تمام مقادیر بی بعد بدون علامت هستند و مقادیر مرجع طوری انتخاب شده اند که مقادیر بی بعد از $O(1)$ باشند. برای عدد ماخ داریم:

$M_\infty = \frac{u_\infty^*}{\sqrt{\frac{{}_\infty^*}{\rho_\infty^*}}}$

برای مستقل بودن از مقدار γ با عدد ماخ به صورت زیر کار می کنیم:

$$\tilde{M} = \frac{u_\infty^*}{\sqrt{\frac{p_\infty^*}{\rho_\infty^*}}} \tag{۷.۱}$$

با قرار دادن پارامترهای بی بعد فوق در معادلات ۱.۱ تا ۳.۱ به فرم بی بعد معادلات ناویر-استوکس می رسیم.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{۸.۱}$$

[۳] Equation of State
[۴] Caloric
[۵] Farfield Stagnation Conditions

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tilde{M}^2}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re_\infty}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{Fr_\infty^2}\rho\delta_{j2} \tag{۹.۱}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i H)}{\partial x_i} = \frac{\tilde{M}^2}{Re_\infty}\frac{\partial(\tau_{ij}u_j)}{\partial x_i} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)RePr_\infty}\frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \frac{\tilde{M}^2}{Fr_\infty^2}\rho u_2 \tag{۱۰.۱}$$

در فرمول های بالا اعداد بی بعد رینولدز [۶]، فرود [۷] و پرانتل به ترتیب به فرم زیر هستند:

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty^* u_\infty^* L^*}{\mu_\infty^*}, \qquad Fr_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{g^* L^*}}, \qquad Pr_\infty = \frac{c_p^* \mu_\infty^*}{k_\infty^*} \tag{۱۱.۱}$$

برای انرژی کل و انتالپی کل بی بعد در واحد جرم داریم:

$$E = e + \frac{1}{2}\tilde{M}^2|u|^2, \qquad H = E + \frac{p}{\rho} \tag{۱۲.۱}$$

معادلات بی بعد حالت و کالوریک به فرم

$$p = \rho T, \qquad e = \frac{1}{\gamma-1}T \tag{۱۳.۱}$$

در می آیند. برای بدست آوردن فشار از ۱۲.۱ و ۱۲.۱ داریم:

$$P\gamma - 1)[\rho E - \frac{1}{2}\tilde{M}^2\frac{|\rho u|^2}{\rho} \tag{۱۴.۱}$$

اگر فرض کنیم $Pr = \frac{\mu^* c_p^*}{k^*}$ و c_p^* ثابت باشد، داریم $\frac{\mu^*}{\mu_\infty^*} = \frac{k^*}{k_\infty^*}$ و در نتیجه داریم:

$$\mu = k$$

و برای ویسکوطیته طبق ساترلند [۸] می توان نوشت:

$$\mu = T^{\frac{3}{2}}\frac{1+S}{T+S}$$

که برای هوا $S = \frac{110}{T_\infty^*}$ و به فرم ساده تر می توان نوشت $\mu \simeq T^{0.7}$. تانسور بی بعد تنش هم به صورت $\tau_{ij} = \mu[(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}]$ می باشد.

---

[۶] Reynolds
[۷] Froude
[۸] Sutherland Law

مراجع

[1] Muller, B. Low mach number asymptotics of the navier-stokes equation and numerical implications. *Journal of Engineering Mathematics*, 34:97–109, 1998. 1