فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

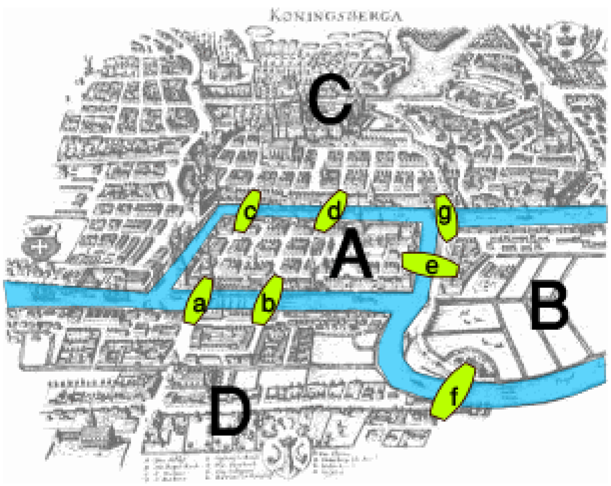
فصل ۱

نظریه گراف و شبکه

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۷۳۶ میلادی، اویلر[1] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ریاضیدان مشهور قرن هجدهم، مقاله‌ای منتشر کرد که در آن از مفهوم گراف برای حل مسئله پل‌های کونیکسبرگ[2] استفاده شده‌بود. این مقاله نخستین اثری است که در آن از گراف‌ها و خواص آن‌ها در حل یک مسئله ریاضی استفاده شده‌است. مسئله پل‌های کونیکسبرگ به شرح زیر است:

چنانکه در شکل ۱.۱ نشان داده شده است، رودخانه پرگل[3] پس از در برگرفتن کامل جزیره کوچکی

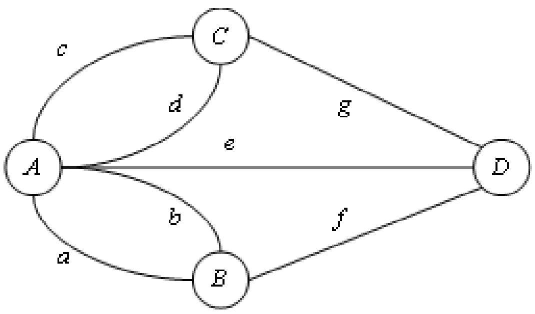


شکل ۱.۱: رودخانه پرگل و پل‌های هفت‌گانه در آن

به نام نیفاف و با طی مسیر کوچکی به صورت دوشاخه‌ای از شهر کونیکسبرگ عبور می‌کند. چنانکه

[1] Euler [2] Konigsberg [3] Pregel

در شکل مشاهده می‌شود در این منطقه هفت پل بر روی رودخانه نصب شده است. براساس این شکل مناطق خشکی شامل چهار منطقه A،B،C و D هستند که از طریق پل‌های a،b،c،d،e،f و g به یکدیگر متصل شده‌اند. مسئله معروف پل‌های کونیکسبرگ عبارتست از آن راهی، تا از یک قسمت از شهر شروع به حرکت کنیم و پس از گذر یک و فقط یک‌بار از تمامی پل‌ها به همان قسمت شهر بازگردیم. آیا چنین مسیری وجود دارد؟(جزیره نیفاف هم قسمتی از شهر فرض می‌شود.) اویلر در مقاله خود ثابت کرد که مسئله پل‌های کونیکسبرگ حلی ندارد. وی مسئله را به شکل زیر طرح کرد. مناطق مختلف شهر را به صورت دایره‌های کوچکی و پل‌های بین هر دو منطقه را توسط پاره خطی که دور منطقه را به‌هم وصل می‌کند نمایش می‌دهیم. شکل۲.۱ روشی که اویلر برای نمایش صورت مسئله به کاربرد را نشان می‌دهد. اویلر ثابت کرد که این مسئله در صورتی جواب دارد که تعداد خطوطی(یال‌هایی) که بر هر دایره(رأس) می‌رسند زوج باشند و چون در این شکل چنین نیست پس این مسئله حلی ندارد.



شکل ۲.۱: گراف پل‌های کونیکسبرگ

۲.۱ گراف‌ها: تعاریف و نمادها

در این بخش ابتدا چند تعریف ساده از گراف، طوقه، یال، مسیرها، همبندی و زیرگراف ارائه می‌شود سپس درباره ماتریس‌های مجاورت و وقوع سخن خواهیم گفت و در نهایت نیز چندین پارامتر مفید و مهم را تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۱ تعریف گراف

گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ رأس‌ها[۴] ، مجموعه $E(G)$ یال‌ها[۵] و مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع Ψ است که با هر یال G، یک جفت نامرتب(نه

[۴] Vertices [۵] Edges

لزوما مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v راس‌هایی باشند، به قسمی که $\Phi(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند، راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند. این مبحث را به این دلیل گراف می‌نامند که می‌توان موضوع مورد بحث را به صورت گراف(نمودار) نمایش داد. راهی یکتا برای ترسیم گراف وجود ندارد. گراف‌هایی را که دارای نمودای هستند که یال‌ها تنها در دو انتهای آن‌ها بریده می‌شود، هامنی[۶] می‌نامند. در گراف G، درجه[۷] راس v از G که به علامت $deg(v)$ یا d_v نشان داده میشود برابر است با تعداد یال‌های مجاور با راس v. علامت‌های $\Delta(G)$و $\delta(G)$ به ترتیب برای ماکسیمم و مینیمم درجه راس‌های G به کار می‌رود.

۲.۲.۱ طوقه و یال‌های چندگانه

اگر بین دو رأس حداقل دو یال وجود داشته باشد آن‌ها را یال‌های چندگانه[۸] می‌نامیم. اگر یالی رأسی را به خود آن وصل کند یک طوقه[۹] نامیده‌می‌شود و گرافی که فاقد طوقه و یال‌های چندگانه باشد گراف‌ساده[۱۰] می‌نامیم. دو راس u و v را مجاور گویندکه یال e این دو راس را به‌هم متصل کند.

۳.۲.۱ مسیرها و همبندی

گشت در G، دنباله ناتهی $W = v_0e_1v_2e_2 \cdots e_kv_k$ است، که جمله‌های آن متناوبأ رأس‌ها و یال‌ها هستند به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$، دو انتهای e_i ، v_{i-1} و v_i هستند. می‌گوییم W گشتی[۱۱] از v_0 به v_k، یا گشت (v_0, v_k)، است. راسهای v_0 و v_k را به ترتیب مبدا و انتهای W و $v_1, v_2, \cdots , v_{k-1}$ را راس‌های داخلی‌اش می‌نامند. عدد صحیح k طول W است. در گراف ساده، گشت $v_0e_1v_1e_2 \cdots e_kv_k$ به وسیله دنباله $v_0, v_1, \cdots , v_k$ متشکل از راس‌هایش تعیین می‌شود. اگر یال‌های $e_1, e_2, \cdots , e_k$ گشت W، مجزا باشند، W را یک گذر[۱۲] نامند و علاوه براین اگر راس‌های $v_0, v_1, v_2, \cdots , v_k$ مجزا باشند، W را مسیر[۱۳] می‌نامند. دو راس uو‌ی v G را همبند خوانند اگر مسیر (u, v) در G موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه راس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \cdots , V_\omega$ وجود دارد به طوری‌که دو راس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], \cdots , G[V_\omega]$ را مولفه‌های[۱۴] G می‌نامند. اگر G دارای دقیقا یک مولفه باشد، G همبند است، در غیر این صورت G ناهمبند است. تعداد مولفه‌های G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم. گشت بسته است اگر طول مثبت داشته باشد و مبدا و انتهای آن یکی

[۶] Planar [۷] Degree [۸] Multiple edges [۹] Loop [۱۰] Simple graph [۱۱] Walk [۱۲] Trail [۱۳] Path
[۱۴] Components

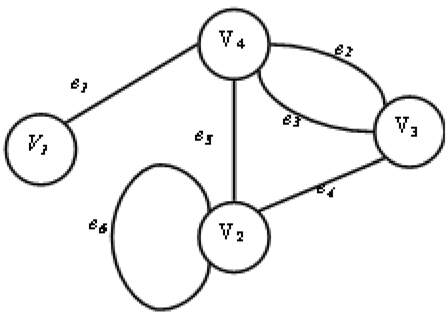
باشند. گذر بسته‌ای که راس‌های داخلی و مبدا آن مجزا باشند، دور[۱۵] است.

۴.۲.۱ زیرگراف

یک زیرگراف[۱۶] از گراف G گرافی است که مجموعه راس‌های آن زیرمجموعه $V(G)$ بوده و مجموعه یالهای آن زیر مجموعه $E(G)$ باشد. بدین ترتیب هرگراف، زیر گراف خود است. اگر S زیر مجموعه‌ای از $V(G)$ باشد زیرگراف القایی[۱۷] به وسیله S زیر گراف ماکزیمالی از گراف G است که S مجموعه راس‌های آن می‌باشد. همچنین زیرگرافی تولید شده یک زیر گراف سراسری[۱۸] از G است اگر شامل همه راس‌های G باشد.

۵.۲.۱ ماتریس مجاورت و وقوع

به هر گراف G ماتریس $v \times \epsilon$ متناظر است که آن را ماتریس‌وقوع[۱۹] G می‌نامند. فرض کنیم راس‌های G را با $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ و یال‌ها را با $e_1, e_2, \cdots, e_\epsilon$ نمایش دهیم. در این صورت ماتریس وقوع G، ماتریس $M(G) = [m_{ij}]$ ، که در آن m_{ij}تعداد دفعات(۰ و ۱ یا ۲) است که v_i بر e_j واقع می‌شود. ماتریس دیگر وابسته به G، ماتریس مجاورت[۲۰] است، این ماتریس $\nu \times \nu$، $A(G) = [a_{ij}]$، که در آن a_{ij} تعداد یال‌هایی است که v_i و v_j را به‌هم متصل می‌کنند.



$$\begin{array}{c|cccc} & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ \hline \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \nu_3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \nu_4 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

ماتریس مجاورت

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline \nu_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \nu_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ماتریس وقوع

شکل ۳.۱: نمایش گراف به سه روش

[۱۵]Cycle [۱۶]Subgraph [۱۷]Induced subgraph [۱۸]Spanning subgraph [۱۹]Incedence matrix
[۲۰]Adjacency matrix

۳.۱ گراف‌های مقدماتی و خواص آن‌ها

۱.۳.۱ گراف کامل

گراف G را کامل[۲۱] می‌نامیم اگر بین هر دو راس آن یالی وجود داشته باشد. گراف کامل n راسی را با علامت K_n نشان می‌دهیم. تعداد یال‌های یک گراف کامل راسی برابر است با $n(n-1)/2$.

۲.۳.۱ گراف صفر

گراف صفر[۲۲] گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد. چنین گرافی با n راس را با علامت N_n نشان می‌دهیم. گراف تک راسی بدون هیچ یال را گراف بدیهی[۲۳] و در غیر این صورت نابدیهی[۲۴] گویند.

۳.۳.۱ گراف‌های P_n و C_n

علامت‌های C_n و P_n به ترتیب برای دوری با n راس و مسیری با n راس به کار می‌رود که به ترتیب گراف دوری و گراف مسیری نامیده می‌شود.

۴.۳.۱ گراف‌دوبخشی

گراف دوبخشی[۲۵] گرافی است که مجموعه راس‌های آن به دو مجموعه غیر تهی V_1 و V_2 افراز شود به‌طوری‌که هیچ دو راس در V_1 مجاور نباشند و هیچ دو راس در V_2 نیز مجاور نباشند، گراف دوبخشی کامل نیز گرافی دوبخشی است به‌طوری‌که هر راس از V_1 با هر راس از V_2 مجاور باشد. گراف دو بخشی کامل با علامت $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود که در آن $|V_1| = m$ و $= |V_2|$.

۵.۳.۱ متمم گراف

متمم[۲۶] گراف G که با علامت $\bar{G}$ نشان داده می‌شود گرافی است که $V(G) = V(\bar{G})$ و هر دو راس که در G مجاور باشند در $\bar{G}$ غیرمجاورند و بالعکس.

[۲۱]Complete [۲۲]Null [۲۳]Trivial [۲۴]Nontrivial [۲۵]Bipartite [۲۶]Complement

۶.۳.۱ اجتماع دو گراف

اجتماع دو گراف G_1 و G_2 که با علامت $G_1 \cup G_2$ نشان داده می‌شود گرافی است که از کنار هم قرار دادن دو گراف حاصل می‌شود(بدون انطباق راس‌ها و یال‌ه).

۷.۳.۱ مجموع دو گراف

به ازای دو گراف G_1 و G_2 اگر هر راس گراف G_1 را به هر راس گراف G_2 متصل کنیم گراف حاصل با علامت $G_1 + G_2$ نشان داده شده و مجموع دو گراف نامیده می‌شود.

۸.۳.۱ گراف kبخشی کامل

گراف kبخشی کامل عبارت است از گراف $\overline{K_{p_1}} + \overline{K_{p_2}} + \cdots + \overline{K_{p_k}}$ و به علامت $K(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ نشان داده می‌شود.

۹.۳.۱ حاصل‌ضرب خارجی دو گراف

حاصل‌ضرب‌مستقیم[۲۷] (خارجی) دو گراف G_1 و G_2 که با علامت $G_1 \times G_2$ نشان داده‌می‌شود، گرافی است که $V_1 \times V_2$ مجموعه راس‌های آن است و دو راس (v_1, v_2) و (v'_1, v'_2) با هم مجاورند اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

[۲۷] Cartesian product