

فصل ۱

ماتریسها و روش حذفی گاوس

۱.۱ مقدمه

این کتاب با مهمترین مسأله جبر خطی شروع می‌شود: حل معادلات خطی. مهمترین حالت، و ساده‌ترین آن، وقتی است که تعداد معادلات با تعداد مجهولها برابر باشد. n معادله و n مجهول داریم که با $n = 2$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} 1x + 2y = 3 & \text{دو معادله} \\ 4x + 5y = 6 & \text{دو مجهول} \end{array}$$

x و y مجهولات هستند. می‌خواهم دو روش را برای حل این دستگاه توضیح دهم، روش حذفی و روش دترمینان. مثلاً x و y توسط اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ مشخص می‌شوند. مسأله این است که از این اعداد چگونه برای حل دستگاه معادلات استفاده کنیم.

۱. روش حذفی چهار برابر اولین معادله را از معادله دوم کم می‌کنیم. در این صورت x از معادله دوم حذف می‌شود و تنها یک معادله برحسب y بدست می‌آید:

$$-3y = -6. \quad (\text{معادله } 1) - 4(\text{معادله } 2)$$

بنابراین می‌دانیم $y = 2$. آنگاه x را می‌توان از معادله $1x + 2y = 3$ بدست آورد:

$$1x + 2(2) = 3 \Rightarrow x = -1. \quad \text{باز-جانشانی}$$

باید بررسی کنیم که این مقادیر x و y در معادله دوم نیز صدق می‌کنند. این روش باید مؤثر باشد که هست:

$$4(x = -1) + 5(y = 2) = 6.$$

۲. دترمینان جواب $y = ۲$ کاملاً به شش عدد ظاهر شده در معادلات بستگی دارد. باید فرمولی برای y (و برای x) وجود داشته باشد. این فرمول به صورت «کسری از دترمینان» است و امیدوارم اجازه بدهید مستقیماً آن را بنویسم:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \\ ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}} = \frac{۱ \times ۶ - ۳ \times ۴}{۱ \times ۵ - ۲ \times ۴} = \frac{-۶}{-۳} = ۲.$$

این موضوع کمی عجیب به نظر می‌رسد مگر اینکه دترمینان ۲ در ۲ را بدانید. این فرمول همان جواب $y = ۲$ را بدست می‌دهد که از همان تقسیم -۶ بر -۳ حاصل می‌شود. اگر قرار باشد با دترمینانها ادامه دهیم (که در اینجا قصد آن را نداریم)، فرمول مشابهی برای محاسبه مجهول x وجود دارد:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۵ \\ ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}} = \frac{۳ \times ۵ - ۲ \times ۶}{۱ \times ۵ - ۲ \times ۴} = \frac{۳}{-۳} = -۱.$$

اجازه دهید این دو روش را مقایسه کنم، با این فرض که n عدد خیلی بزرگتری است ($n = ۱۰۰۰$ یک مقدار خیلی متوسط در محاسبات علمی است). حقیقت این است که استفاده مستقیم از دترمینان برای ۱۰۰۰ معادله یک مصیبت کامل است. این روش قادر به کار با میلیونها عدد ظاهر شده در سمت چپ فرمول را دارد ولی نه به شکل بهینه. این فرمول را (با نام قاعده کرامر) در فصل ۴ خواهیم دید، اما در فصل ۱ به دنبال روشی مناسب برای حل ۱۰۰۰ معادله هستیم.

این روش مناسب روش حذفی گاوس نام دارد. این روش الگوریتمی است که همواره برای حل دستگاههای بزرگ معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثالهای یک کتاب درسی ($n = ۳$) نهایت صبر نویسنده و خواننده است) ممکن است تفاوتی مشاهده نکنید. معادلات (۲) و (۴) اساساً گامهای یکسانی برای یافتن $y = ۲$ به کار می‌برند. مطمئناً محاسبه x با استفاده از باز-جانشانی معادله (۳) سریعتر از محاسبه کسر در معادله (۵) بدست می‌آید. برای n های بزرگتر هیچ سؤالی وجود ندارد. روش حذفی موفقتر است (و این روش حتی بهترین روش محاسبه دترمینان است).

ایده روش حذفی بسیار ساده است — بعد از چند مثال در آن تبیر پیدا می‌کنید. این روش پایه‌ای برای نصف این کتاب خواهد بود که با استفاده از آن یک ماتریس را ساده می‌کنیم تا فهم آن راحت‌تر شود. به همراه فرایند الگوریتم می‌خواهیم چهار جنبه عمیق را در این فصل شرح دهیم. این چهار جنبه عبارتند از:

۱. معادلات خطی ما را به هندسه مسطحه راهنمایی می‌کند. تصور یک صفحه ۹ بعدی در یک فضای ۱۰ بعدی آسان نیست. سخت‌تر از آن این است که تقاطع ۱۰ تا از این صفحات را تصور کنیم که جواب ۱۰ معادله