بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

عدد نظم مدول همولوژی Tor و اعداد بتی مدرج

استاد راهنما:
دکتر احد رحیمی

نگارش:
حسن نورمحمدی

بهمن ۱۳۸۹

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
حسن نورمحمدی

تحت عنوان :

عدد نظم مدول همولوژی Tor و اعداد بتی مدرج

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۱/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر احد رحیمی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

۲- استاد داور داخل گروه دکتر سیروس رسولیار با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

۳- استاد داور خارج گروه دکتر سیامک یاسمی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء:

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون‌دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شك نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌ها است...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احد رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حسن نورمحمدی

بهمن ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

فرض کنید K میدان و $S = K[x_1, ..., x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای مدرج استاندارد با ایده‌ال مدرج ماکسیمال $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_n)$ باشد و M و N، S–مدولهای مدرج و متناهی مولد باشند. ما با شرط اینکه بُعد کرول مدول همولوژی $\mathrm{Tor}_1^S(M, N)$ کمتر یا مساوی یک باشد کرانی برای عدد نظم کوهمولوژی موضعی $\mathrm{Tor}_k^S(M, N)$ بر حسب اعداد بتی مدرج مدولهای M و N می‌یابیم و نتایج به دست آمده را برای سیزیجی‌ها[1]، حاصل‌ضربها و توانهای ایده‌ال‌ها بکار می‌بریم. به عنوان نمونه نشان می‌دهیم هر ایده‌ال همگن $\mathfrak{m}$–اولیه که نمایش خطی دارد توانی برابر با توانی از $\mathfrak{m}$ دارد و اگر تحلیل آزاد مینیمال I برای $\lceil (n-1)/2 \rceil$ مرحله خطی باشد آنگاه I^2 با توانی از $\mathfrak{m}$ برابر است.

کلمات کلیدی:

عدد نظم ، تحلیل آزاد مینیمال مدرج ، کوهمولوژی موضعی، اعداد بتی مدرج

[1] Syzygies

فهرست مطالب

پیشگفتار

موضوع عدد نظم یکی از مفاهیم اساسی در جبر جابجایی و هندسه جبری تصویری است که اولین بار توسط دیوید مامفورد[۱]در سال ۱۹۶۶ تحت عنوان عدد نظم کاستلنیوو[۲] نامگذاری شد. دلیل این نامگذاری به نتایج کلاسیکی که کاستلنیوو در سال ۱۸۹۳ بر روی خم‌های تصویری به دست آورد، برمی‌گردد. مامفورد عدد نظم را برحسب کوهمولوژی بافه[۳] مطرح کرد و در سال ۱۹۸۲ اویشی[۴] تعریفی از عدد نظم کاستلنیوو–مامفورد را بر حسب کوهمولوژی موضعی ارائه کرد و آیزنباد و گوتو در سال ۱۹۸۴ این ناوردا[۵] را بر حسب تحلیل‌های آزاد مینیمال بیان کردند.

با معرفی این ناوردا، مسئله یافتن کرانی برای عدد نظم به موضوع جذابی تبدیل گردید و افراد زیادی توانستند کران‌هایی برای این ناوردا پیدا کنند.

در این پایان‌نامه، ما یک قضیه اساسی روی حلقه‌ی چندجمله‌ای ثابت می‌کنیم که نتایج به دست آمده توسط پیتلود[۶]–گیمیگلیانو[۷]–جرامیتا[۸][۱۹۹۵]، چندلر[۹] [۱۹۹۷]، سیدمن[۱۰] [۲۰۰۲]، کُنکا[۱۱]–هرزوگ[۱۲] [۲۰۰۳] و کاویگلیا[۱۳] [۲۰۰۳] را در بر می‌گیرد.

فصل اول این تحقیق، شامل مطالبی از جبر جابجایی و همولوژی است که در فصول بعد از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم دنباله‌های طیفی را معرفی می‌کنیم که نقشی مهمی در اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه دارد. در فصل سوم، ابتدا مفهوم تحلیل آزاد مدرج را معرفی و چگونگی محاسبه آن را بیان می‌کنیم و در بخش بعد عدد نظم را برحسب تحلیل آزاد مینیمال تعریف می‌کنیم و در ادامه تعاریف معادل آن را بر حسب Tor، Ext، کوهمولوژی موضعی و برش‌ها[۱۴] بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم که در واقع فصل اصلی پایان‌نامه است، M و N را دو S–مدول مدرج متناهی مولد در نظر می‌گیریم که S حلقه‌ی چندجمله‌ای مدرج استاندارد $S = K[x_1, \dots, x_n]$ روی میدان K با ایده‌ال همگن ماکسیمال $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است و فرض می‌کنیم بعد کرول $\operatorname{Tor}_1^S(M, N)$ کمتر یا مساوی یک است. با مفروضات فوق، در قضیه ۴–۱–۱ کران بالایی برای عدد نظم $H^i_{\mathfrak{m}}(\operatorname{Tor}_k^S(M, N))$ بر حسب اعداد بتی مدرج مدولهای M و N می‌یابیم. از این قضیه نتیجه مهم زیر را به دست می‌آوریم

$$\operatorname{reg} \operatorname{Tor}_k(M, N) \leq \operatorname{reg} M + \operatorname{reg} N + k.$$

که در حالت $k = 0$ کران بالایی برای عدد نظم حاصل‌ضرب تانسوری $M \underset{S}{\otimes} N$ به دست می‌دهد که در سال ۲۰۰۲، سیدمن[۱۵] در [۲۷] و در سال ۲۰۰۳ کاویگلیا[۱۶] در [۹] هر یک با روش‌هایی متفاوتی پیدا کردند.

در ادامه روابط جالبی بین اعداد بتی مدرج به دست می‌آوریم. برای نمونه نشان می‌دهیم اگر $I \subseteq S$ یک

[۱]Mamford [۲]Castelnuovo regularity [۳]Sheaf cohomology [۴]Ooishi [۵]Invariant [۶]Pitteloud [۷]Gimigliano [۸]Geramita [۹]Chandler [۱۰]Sidman [۱۱]Conca [۱۲]Herzog [۱۳]Caviglia [۱۴]Truncations [۱۵]Sidman [۱۶]Caviglia

ایده‌ال و $M = N = S/I$ مدول‌هایی دوری با بعد کمتر یا مساوی یک باشند آنگاه تابع $p \longrightarrow t_p(S/I)$ در شرط تحدب ضعیفِ

$$t_n(S/I) \leq t_p(S/I) + t_{n-p}(S/I)$$

برای هر $1 \leq p \leq n$ صدق می‌کند. که در آن $t_p(S/I)$ بزرگترین درجه از مولدهای مینیمال همگنِ p–اُمین سیزیجی S/I است.

در بخش سوم این فصل با اثبات قضایایی برای حاصل‌ضرب ایده‌ال‌ها، شرایطی را فراهم می‌آوریم که توان‌های یک ایده‌ال دارای تحلیل خطی باشند. در این بخش فرضیه‌ای[1] که اولریخ[2] و آیزنباد[3] در [۱۵] به شرح زیر مطرح نمودند را در حالت $n = 3$ و برای ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای ثابت می‌کنیم.

فرضیه. فرض کنید $I \subseteq S$ ایده‌الی $\mathfrak{m}$–اولیه با تولید یکسان از درجه d و به طور خطی نمایش‌پذیر باشد. در این صورت $I^{n-1} = \mathfrak{m}^{d(n-1)}$.

با قرار دادن $I = J$ در نتیجه زیر، فرضیه فوق در حالت $n = 3$ ثابت می‌شود.

نتیجه؟؟. فرض کنید I و J ایده‌ال‌هایی همگن از S با تولید یکسان از درجه‌ی d و با بعُدهای کمتر یا مساوی یک باشند. در این صورت اگر تحلیل‌های I و J برای $\lceil (n-1)/2 \rceil$ مرحله خطی باشند.(برای نمونه، اگر I و J دارای نمایش خطی باشند و $n \leq 3$)، آنگاه IJ تحلیل خطی دارد. بویژه اگر I و J ایده‌ال‌های $\mathfrak{m}$–اولیه باشند آنگاه $IJ = \mathfrak{m}^{2d}$.

در آخر قضیه‌ای از رومر [4] در [۲۵] را اثبات می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که تحت چه شرایطی همه‌ی توان‌های یک ایده‌ال، تحلیل خطی دارند.

---
[1]Conjecture [2]Ulrich [3]Eisenbud [4]Römer

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$V(I)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول شامل I
$\mathrm{Supp}_R(M)$	تکیه‌گاه R–مدول M
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های اول حلقه R
$\mathrm{Ass}_R(M)$	ایده‌ال‌های اول وابسته R–مدول M
$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R–مدول M
$Z_R(M)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R–مدول M
$\dim R$	بعد حلقه R
$\dim_R(M)$	بعد کرول R–مدول M
$\mathrm{codim}(-)$	همبعد
$\mathrm{ht}(-)$	ارتفاع
$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه ایده‌ال‌های ماکسیمال حلقه R
$l_R(M)$	طول R–مدول M
$\mathrm{grade}_R(I,M)$	طول M–رشته منظم ماکسیمال در I
$\mathrm{depth}_R(M)$	طول M–رشته منظم ماکسیمال در ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$
$\mathrm{Socle}_R(M)$	ساکل R–مدول M
$\mathrm{pd}_R(M)$	بعد پروژکتیو R–مدول M
$\mathbf{Mod}(\mathbf{R})$	رسته‌ی R–مدول‌ها
$H^i_{\mathfrak{m}}(-)$	i–امین کوهمولوژی موضعی
$\deg(x)$	درجه‌ی عنصر همگن x
$K_\bullet(\underline{x};R)$	همبافت کزول R نسبت به $\underline{x}$
$H_p(\underline{x};M)$	p–امین مدول همولوژی همبافت کزول M نسبت به $\underline{x}$
$S=K[x_1,\dots,x_n]$	حلقه چندجمله‌ای روی میدان K
$\mathfrak{m}=(x_1,\dots,x_n)$	ایده‌ال همگن ماکسیمال حلقه چندجمله‌ای S
$\mathrm{Mon}(S)$	مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌هایِ S

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی از جبر جابجایی و همولوژی را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر پیشرفته آشنایی دارد. در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور ازحلقه‌ی R، حلقه‌ای جابجایی و یکدار است.

۱-۱ مفاهیم و قضایایی از جبر جابجایی

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید I ایده‌الی سره از حلقه‌ی R باشد، $V(I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(I)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\ \ I\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

تعریف ۱-۱-۲ (تکیه‌گاه). فرض کنید M یک R-مدول باشد، تکیه‌گاه M را که با نماد $\operatorname{Supp}(M)$ نمایش می‌دهیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Supp}(M)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\ \ M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}.$$

تعریف ۱-۱-۳ (ایده‌ال‌های اول وابسته). فرض کنید M یک R-مدول باشد، مجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته M را که با علامت $\operatorname{Ass}(M)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\operatorname{Ass}(M)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R): \exists x\in M,\ \ \mathfrak{p}=\operatorname{Ann}_R(x)\}.$$

لم ۱-۱-۴. *فرض کنید M یک R-مدول باشد، آنگاه*

۱. $\operatorname{Supp}(M)=\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R):\ \exists x\in M,\ \operatorname{Ann}_R(x)\subseteq \mathfrak{p}\}$.

۲. $M\neq 0$ *اگر و تنها اگر* $\operatorname{Supp}_R(M)\neq\emptyset$.

۳. *اگر R نوتری و M با تولید متناهی باشد، آنگاه* $\operatorname{Supp}(M)=V\big(\operatorname{Ann}_R(M)\big)$.

۴. *اگر I ایده‌لی از حلقه R (نه لزوماً نوتری) باشد آنگاه* $\operatorname{Supp}(R/I)=V(I)$.

برهان. رجوع شود به لم ۲۰ از فصل ۹ در [۲۸] و تمرین ۱۹ از فصل ۳ در [۳]. □

تعریف ۱-۱-۵ (بعد حلقه). بعد حلقه R را با $\dim(R)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim(R)=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\ \ \mathfrak{p}_0\subsetneq \mathfrak{p}_1\subsetneq \ldots\subsetneq \mathfrak{p}_n\ ,\ \mathfrak{p}_i\in \operatorname{Spec}(R)\ ;\ i=0,\ldots,n\}.$$

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنید I ایده‌الی از حلقه R باشد، بُعد I که با $\dim I$ نمایش می‌دهیم را همان $\dim R/I$ تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\begin{aligned}\dim I=\dim(R/I)&=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\ \ \frac{\mathfrak{p}_0}{I}\subsetneq \frac{\mathfrak{p}_1}{I}\subsetneq \ldots\subsetneq \frac{\mathfrak{p}_n}{I}\ ,\ \mathfrak{p}_i\in \operatorname{Spec}(R)\ ;\ i=0,\ldots,n\}\\ &=\sup\{n\in \mathbb{N}_0:\ \ I\subseteq \mathfrak{p}_0\subsetneq \mathfrak{p}_1\subsetneq \ldots\subsetneq \mathfrak{p}_n\}.\end{aligned}$$

۱-۲ مفاهیم و قضایایی از جبر همولوژی

تعریف ۱-۲-۱ (n-اُمین مدول همولوژی). یک همبافت نزولی از R-مدول‌ها، یک دنباله از R-همریختی‌های

$$\mathbf{C}_\bullet\colon \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d_n o\, d_{n+1} = 0$. برای هر همبافت نزولی $\mathbf{C}_\bullet$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$B_n(\mathbf{C}_\bullet) = \operatorname{Im} d_{n+1} \qquad , \qquad Z_n(\mathbf{C}_\bullet) = \operatorname{Ker} d_n$$

و n-اُمین مدول همولوژی همبافت $\mathbf{C}_\bullet$ را تعریف می‌کنیم

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) = \frac{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}.$$

تعریف ۱-۲-۲ (n-اُمین مدول کوهمولوژی). یک همبافت صعودی از R-مدول‌ها، یک دنباله از R-همریختی‌های

$$\mathbf{C}^\bullet\colon \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $d^n o\, d^{n-1} = 0$. برای هر همبافت صعودی $\mathbf{C}^\bullet$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم

$$B^n(\mathbf{C}^\bullet) = \operatorname{Im} d^{n-1} \qquad , \qquad Z^n(\mathbf{C}^\bullet) = \operatorname{Ker} d^n$$

و n-اُمین مدول کوهمولوژی همبافت $\mathbf{C}^\bullet$ را تعریف می‌کنیم

$$H^n(\mathbf{C}^\bullet) = \frac{Z^n(\mathbf{C}^\bullet)}{B^n(\mathbf{C}^\bullet)}.$$

قضیه ۱-۲-۳. *فرض کنید T یک تابعگون جمعی دقیق از رسته R-مدول‌ها به رسته R'-مدول‌ها باشد. در این صورت برای R-همبافت‌های $\mathbf{C}_\bullet$ و $\mathbf{C}^\bullet$ داریم*

۱. *اگر T تابعگونی همورد باشد آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$،*

$$H_n(T(\mathbf{C}_\bullet)) \cong T(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \quad H^n(T(\mathbf{C}^\bullet)) \cong T(H^n(\mathbf{C}^\bullet)).$$

۲. *اگر T تابعگونی پادورد باشد آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$،*

$$H^n(T(\mathbf{C}_\bullet)) \cong T(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \quad H_n(T(\mathbf{C}^\bullet)) \cong T(H^n(\mathbf{C}^\bullet)).$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۲۳ از فصل ۸ و قضیه ۳ از فصل ۱۱ در [۱۷]. □

فصل ۲

دنباله‌های طیفی

در این فصل به تعریف دنباله طیفی[1] می‌پردازیم. قبل از آن باید با مفاهیمی مانند همبافت دوگانه، همبافت مجتمع و کاپل دقیق آشنا شد. در واقع این فصل ابزاری قوی به ما معرفی می‌کند که در فصل ۴ در اثبات قضیه اساسی ۴-۱-۱، آن را به کار می‌گیریم.

۲-۱ همبافت دوگانه

تعریف ۲-۱-۱. یک مدول مدرج دوگانه $M = (M_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ، خانواده‌ای اندیس‌گذاری شده از R-مدول‌هاست. که معمولاً به صورت $M_{\bullet\bullet}$ نمایش می‌دهیم.
می‌توان یک مدول مدرج دوگانه را روی صفحه مختصات نمایش داد.

تعریف ۲-۱-۲. فرض کنید M و N دو مدول مدرج دوگانه و $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ باشد. یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه‌ی (a,b) نمایش داده شده به صورت $f : M \longrightarrow N$، خانواده‌ای است از همریختی‌های $f = \left(f_{(p,q)} : M_{(p,q)} \longrightarrow N_{(p+a,q+b)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ و می‌نویسیم $\deg(f) = (a,b)$.

قضیه ۲-۱-۳. *فرض کنید $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ نگاشت‌هایی مدرج دوگانه با درجه‌های به ترتیب (a,b) و (a',b') باشند آنگاه ترکیب gof یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه $(a+b, a'+b')$ است.*

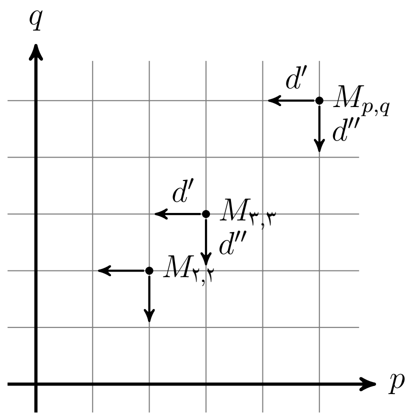
برهان. واضح است. □

نکته و تعریف ۲-۱-۴. *خانواده‌ی R-مدول‌های مدرج دوگانه و نگاشت‌های مدرج دوگانه تشکیل یک رسته می‌دهند. حال دقیق بودن یک دنباله در این رسته را تعریف می‌کنیم.*
اگر $M' = (M'_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ و $M = (M_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ دو مدول مدرج دوگانه باشند در این صورت M' یک زیرمدول M است اگر $M'_{(p,q)} \subseteq M_{(p,q)}$ برای هر $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$. لذا نگاشت شمول یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه $(0,0)$ است و اگر $M' \subseteq M$ باشد آنگاه مدول خارج قسمتی $M/M' = \left(M_{(p,q)}/M'_{(p,q)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ یک مدول مدرج دوگانه است و نگاشت طبیعی $M \longrightarrow M/M'$ یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه $(0,0)$ است.
و حال اگر $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت مدرج دوگانه از درجه (a,b) باشد آنگاه نگاشت شمول $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f_{(p,q)}) \longrightarrow (M_{(p,q)})$، به طور طبیعی مدرج دوگانه است، از طرف دیگر برای هر (p,q)، تعریف کنیم

$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Im} f_{(p-a,q-b)}) \subseteq (N_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$$

بنابراین دقیق بودن رشته $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ بدین معناست که $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ و این یعنی برای هر $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$، $\operatorname{Im} f_{(p-a,q-b)} = \operatorname{Ker}\ g_{(p,q)}$.

---
[1]Spectral sequence



شکل ۲ - ۱: همبافت دوگانه

فرض کنید مثلث $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\alpha,\beta,\gamma)$ *از مدول‌ها و نگاشت های مدرج دوگانه زیر*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbf{B} \arrow[dl, "\beta"] \\ & \mathbf{C} \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

در هر رأس دقیق باشد یعنی $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im}\gamma$ *و* $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ *و* $\operatorname{Im}\beta = \operatorname{Ker}\gamma$*. این مثلث دقیق در واقع بخشی از یک دنباله دقیق و طولانی برای هر* $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ *است. حال اگر* α *و* β *و* γ *نگاشت هایی مدرج دوگانه به ترتیب از درجه های* (a,a') *و* (b,b') *و* (c,c') *باشند برای* $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ *دنباله دقیق و طولانی زیر را داریم*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{B}_{(p-b-c,,q-b'-c')} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C}_{(p-c,q-c')} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{A}_{(p,q)} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B}_{(p+a,q+a')} \xrightarrow{\beta} \mathbf{C}_{(p+a+b,q+a'+b')} \to \cdots$$

تعریف ۲-۱-۵. یک همبافت دوگانه[1]، سه‌تایی مرتب مانند (M,d',d'') است که در آن $M=(M_{p,q})$ مدول مدرج دوگانه و $d',d'' : M \longrightarrow M$ دیفرانسیل‌هایی مدرج دوگانه هستند با درجه‌های $\deg(d')=(-1,0)$ و $\deg(d'')=(0,-1)$ که خاصیت پادجابجایی[2] دارند یعنی

$$d'_{p,q-1}d''_{p,q} + d''_{p-1,q}d'_{p,q} = 0$$

دقت شود که منظور از دیفرانسیل‌های d' و d'' یعنی این که $d'od' = 0$ و $d''od'' = 0$.

هر همبافت دوگانه را می‌توان در صفحه مختصات p و q نمایش داد. بدین صورت که هر مدول $M_{p,q}$ با نقطه‌ی (p,q) در این صفحه نظیر می‌شود(شکل ۲ - ۱).

بنابراین برای هر p و q دیفرانسیل $d'_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p-1,q}$ نقاط را یک واحد به سمت چپ و دیفرانسیل $d''_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p,q-1}$ نقاط را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کند و سطرهای $M_{*,q}$ و ستون‌های $M_{p,*}$ همبافت هستند و همچنین تساوی $d'_{p,q-1}d''_{p,q} = -d''_{p-1,q}d'_{p,q}$ بیان می‌کند که هر مربع در نمودار شکل۲ - ۱ ، پادجابجایی است.

[1] Bicomplex or Double complex [2] Anticommutative

۲-۲ صافی و کاپل دقیق

تعریف ۲-۲-۱. فرض کنید $\mathscr{A}$ یک رسته آبلی باشد. رسته تمام همبافت‌های در $\mathscr{A}$ را با نماد $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$ نمایش می‌دهیم.

همبافت $(\mathbf{A}_\bullet, \delta_\bullet)$ را یک زیر همبافت $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ گوئیم هرگاه یک نگاشت زنجیری $i : \mathbf{A}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet$ چنان باشد که برای هر n نگاشت i_n یک به یک باشد و در رسته $\mathbf{Comp}(\mathbf{Mod})$ همبافت $(\mathbf{A}_\bullet, \delta_\bullet)$ یک زیر همبافت $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ است هرگاه برای هر n داشته باشیم A_n زیرمدول C_n و $\delta_n = d_n|_{A_n}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] \arrow[u, "i_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "\delta_n"'] \arrow[u, "i_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[u, "i_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

فصل ۳

تحلیل آزاد مدرج و عدد نظم

با توجه به این که ابزار کار ما در این پایان نامه حلقه‌چندجمله‌ای است بیشتر قضایا و لم‌ها روی این حلقه بیان شده است.

۳-۱ تحلیل آزاد مدرج و اعداد بتی مدرج

تعریف و نکته ۳-۱-۱. *$R-$ مدول F را آزاد مدرج گوییم، هرگاه F دارای پایه‌ای باشد که همه‌ی اعضای آن همگن باشد به عبارتی خانواده‌ای از اعداد صحیح $\{n_i\}_{i\in I}$ چنان باشد که $F \cong \underset{i\in I}{\oplus} R(n_i)$ بنابراین می‌توان به سادگی نشان داد که هر مدول مدرج، تصویر همریخت یک مدول آزاد مدرج است، یعنی اگر M یک $R-$مدول مدرج باشد و $\{m_i\}_{i\in I}$ مجموعه مولدی برای M باشد که برای هر $i \in I$، $\deg(m_i) = n_i$ آنگاه $R-$همریختی زیر همگن و پوشاست*

$$\varphi : \underset{i\in I}{\oplus} R(-n_i) \longrightarrow M$$

$$e_i \longmapsto m_i$$

تعریف ۳-۱-۲. فرض کنید M یک R-مدول مدرج باشد، آنگاه یک تحلیل آزاد مدرج از M، رشته‌ای دقیق به صورت

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

است که در آن F_iها، R-مدول‌های آزاد مدرج هستند و d_iها، R-همریختی‌های همگن‌اند.

تعریف ۳-۱-۳. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه *موضعی و M یک $R-$مدول مدرج با تحلیل آزاد مدرج به صورت

$$\mathbf{F}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

باشد.گوییم تحلیل فوق مینیمال است هرگاه برای هر $i \geq 1$، $\mathrm{Im}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$، و به عبارت دیگر نگاشت‌های همبافت $\mathbf{F} \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{m}$ ،همه برابر صفر باشند.

۳-۲ عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد

در این بخش به معرفی عدد نظم کاستلنیوو–مامفورد به همراه برخی تعاریف معادل با آن و یک سری قضایا و نتایج در مورد آن می‌پردازیم.

فرض بر این است که $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی میدان K با ایده‌ال ماکسیمال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ است.

تعریف ۳-۲-۱ (عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد). فرض کنید M یک $S-$مدول مدرج متناهی مولد با تحلیل آزاد مینیمال مدرج به صورت

$$\circ \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_\circ \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

باشد.(توجه شود که بنابر قضیه سیزیجی هیلبرت **??** و گزاره **??** طول این تحلیل متناهی و با بعد پروژکتیو M برابر است.).
گیریم b_i ماکسیمم درجه از مولدهای F_i باشد.برای عدد صحیح r، مدول M را $r-$منظم گوییم هرگاه برای هر $i = \circ, \dots, s$، $b_i - i \leq r$ باشد. و عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد یا به اختصار عدد نظم M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{reg}(M) = \min\left\{r : \ b_i - i \leq r \ \ ; i = \circ, \dots, s\right\}$$

که این خود معادل است با

$$\operatorname{reg}(M) = \max\left\{b_i - i : \ i = \circ, \dots, s\right\}.$$

بنابراین، می‌توان گفت که S-مدول M، r-منظم است هرگاه $\operatorname{reg}(M) \leq r$. بعلاوه اگر $M = \circ$ تعریف می‌کنیم $\operatorname{reg}(M) = -\infty$.

فصل ۴

عدد نظم مدول هومولوژی Tor

مقدمه: در سراسر این فصل، $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی میدان K و ایده‌ال ماکسیمال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ است. بعد کرول مدول M را با $\dim M$ و بعد فضای برداری M را با $\dim_K M$ نمایش می‌دهیم. برای S-مدول مدرج متناهی مولد M و ایده‌ال I از S با توجه به نتیجه **??**، $\operatorname{codim} M = n - \dim M$ و $\operatorname{codim} I = n - \dim I$.

همان طور که در تعریف ۱-۱-۶، بیان شد منظور از $\dim I$ همان $\dim S/I$ است.

در این فصل برای عدد نظم S-مدول مدرج متناهی مولد M از تعابیر معادل آن که در بخش ۳-۲ بیان شد استفاده می‌کنیم یعنی

$$\operatorname{reg}(M) = \max_j \left\{\operatorname{reg} H^j_{\mathfrak{m}}(M) + j\right\}$$

و

$$\operatorname{reg}(M) = \max_p \left\{\operatorname{reg} \operatorname{Tor}^S_p(M, K) - p\right\}$$

و یا به عبارتی با توجه به ملاحظه **??**،

$$\operatorname{reg}(M) = \max_p \left\{t_p(M) - p\right\}$$

که در آن $t_p(M) = \operatorname{reg} \operatorname{Tor}^S_p(M, K) = \max\{j : \beta_{ij} \neq 0\}$.

اگر $M = 0$ تعریف می‌کنیم $\operatorname{reg}(M) = -\infty$.

۴-۱ کران روی عدد نظم کوهمولوژی موضعی Tor

در این بخش به بیان یک قضیه اساسی می‌پردازیم که برای اثبات آن نیازمند به ابزار کارآمد دنباله طیفی در فصل ۲ هستیم.

قضیه ۴-۱-۱. *فرض کنید M و N دو S-مدول مدرج متناهی مولد و j و k اعدادی صحیح باشند و $\dim \operatorname{Tor}^S_1(M, N) \leq 1$. در این صورت برای هر p و q که $p + q = n - j + k$،*

$$\operatorname{reg} H^j_{\mathfrak{m}}\big(\operatorname{Tor}^S_k(M, N)\big) \leq \max\{X, Y, Z\}$$

که در آن

$$X = t_p(M) + t_q(N) - n$$

$$Y = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'>p}} \left\{t_{p'}(M) + \operatorname{reg} H^{n-q'}_{\mathfrak{m}}(N)\right\}$$

$$Z = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'<p}} \left\{\operatorname{reg} H^{n-p'}_{\mathfrak{m}}(M) + t_{q'}(N)\right\}.$$

منابع و مآخذ

[۱] س. یاسمی، م. پورنکی، مقدمه‌ای بر نظریه مدول‌ها. انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۶.

[2] R.B. Ash , A course in commutative algebra., Lecture notes 2003.

[3] M.F. Atyah , I.G.Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison–Wesley, London (1969).

[4] M. Auslander, Modules over unramified regular local rings. Illinois J. Math.,5:631–647, 1961.

[5] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] M.P. Brodmann, R.Y. Sharp, Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 60, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[7] W. Bruns, J. Herzog, Cohen–Macaulay Rings, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 39, Cambridge University Press,Cambridge, 1993.

[8] W. Bruns, U. Vetter, Determinantal Rings. Springer LNM 1327, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] G. Caviglia, Bounds on the Castelnuovo-Mumford regularity of tensor products, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear), preprint, 2003.

[10] G. Caviglia, Koszul algebras, Castelnuovo-Mumford regularity and generic initial ideals, Ph.D. thesis, University of Kansas, 2004.

[11] A. Conca, Regularity jumps for powers of ideals, http://www.arxiv.org/math.AC/0310493, 2003.

[12] A. Conca, J. Herzog and T. Hibi, Rigid resolutions and big Betti numbers, Comment. Math. Helv. 79 (2004),826–839.

[13] D. Cox, J. Little,D. O'Shea, Using Algebraic Geometry. Springer (1992).

[14] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry. Springer (1995).

[15] D. Eisenbud, C. Huneke and B. Ulrich, The regularity of Tor and graded Betti numbers, Amer. J. Math. 128 (2006) 573–605.

[16] D. Eisenbud, Geometry of Syzygies, Springer-Verlag, New York, 2004.

[17] H.B. Foxby, Homological algebra, Lecture notes.

[18] D.R. Grayson, M. Stillman, Macaulay 2, A Software System for Research in Algebraic Geometry, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[19] J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals,Springer London Dordrecht Heidelberg New York,2010.

[20] J. Herzog, T.Hibi, X.Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution. Math. Scand., 95, 23–32 (2004).

[21] J.P. Serre, Local Algebra,Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000.

[22] T. Marley, Graded rings and modules, Lecture notes.

[23] S. Lichtenbaum, On the vanishing of Tor in regular local rings. Illinois J. Math.,10:220–226, 1966.

[24] I. Peeva, Graded syzygies,Springer-Verlag London Limited 2010.

[25] T. Römer, Homological properties of bigraded algebras. Ill. J. Math., 45, 1361–1376 (2001).

[26] J.J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Springer Science+Business,2009.

[27] J. Sidman, On the Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideal sheaves, Adv.Geom. 2 (2002), 219–229.

[28] R.Y. Sharp, Steps in commutative algebra , Cambridge University Press. 1990.

[29] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, New York, 1994.

[30] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra. Vol. I, II, Springer (1960).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی	Probabilistic
ارزیابی	Valuation
اندازه	Measure
پایدار	Stably
توپولوژی ضعیف	Weak Topology
دامنه‌توانی	Powerdomain
فضای تابع	Function Space
دامنه معنایی	Semantic Domain
قطعه‌برنامه	Program Fragment
موضعی منظم	Regular local
مرتب	Ordered

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار .... Dcpo
فضای تابع .... Function Space
اندازه .... Measure
مرتب .... Ordered
دامنه‌توانی .... Powerdomain
احتمالی .... Probabilistic
قطعه‌برنامه .... Program Fragment
دامنه معنایی .... Semantic Domain
پایدار .... Stably
ارزیابی .... Valuation
توپولوژی ضعیف .... Weak Topology

Abstract

Let $S = K[x_1, \ldots, x_n]$, let M , N be finitely generated graded S-modules, and let $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq S$. We give bounds for the regularity of the local cohomology of $\operatorname{Tor}_k(M, N)$ in terms of the graded Betti numbers of M and N, under the assumption that $\dim \operatorname{Tor}_1(M, N) \leq 1$. We apply the results to syzygies, products and powers of ideals. For example we show that any homogeneous linearly presented $\mathfrak{m}$-primary ideal has some power equal to a power of $\mathfrak{m}$; and if the first $\lceil (n-1)/2 \rceil$ steps of the resolution of I are linear, then I^2 is a power of $\mathfrak{m}$.

Keywords:
Regularity, Minimal graded free resolution, Local cohomology, Graded betti number

Razi University

Master of Science
Department of Mathematics

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

The regularity of Tor and graded betti numbers

Evaluated and approved by thesis committee : as ....

Dr. A. Rahimi, Supervisor (Assistant Professor.) ....

Dr S. Yassemi, External Examiner (Professor.) ....

Dr S. Rasoulyar, Internal Examiner (Assistant Professor.) ....

February 2011

Razi University

Master of Science
Department of Mathematics

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

The regularity of Tor and graded betti numbers

Supervisor
Dr. Ahad Rahimi

By
Hassan Noormohammadi

February 2011