بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان :

پوشش از سیستم های دوری روی تکواره ها

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور:
دکتر لیلی شریفان

نگارش:
رسول رشیدی

آبان ۱۳۹۱

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

نام دانشجو:
رسول رشیدی

تحت عنوان :
پوشش از سیستم های دوری روی تکواره ها

در تاریخ ۱۳۹۱/۸/۳۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر غلامرضا مقدسی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء:

۲ - استاد داور داخل گروه با مرتبه‌ی علمی امضاء:

۳ - استاد داور خارج گروه با مرتبه‌ی علمی امضاء:

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون‌دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شك نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

رسول رشیدی

آبان ۱۳۹۱

تقدیم به

همسر مهربانم

چکیده

کلمات کلیدی:

فهرست مطالب

پیشگفتار

موضوع عدد نظم یکی از مفاهیم اساسی در جبر جابجایی و هندسه جبری تصویری است که اولین بار توسط دیوید مامفورد[۱] در سال ۱۹۶۶ تحت عنوان عدد نظم کاستلنیوو[۲] نامگذاری شد. دلیل این نامگذاری به نتایج کلاسیکی که کاستلنیوو در سال ۱۸۹۳ بر روی خم‌های تصویری به دست آورد، برمی‌گردد. مامفورد عدد نظم را برحسب کوهمولوژی بافه[۳] مطرح کرد و در سال ۱۹۸۲ اویشی[۴] تعریفی از عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد را بر حسب کوهمولوژی موضعی ارائه کرد و آیزنباد و گوتو در سال ۱۹۸۴ این ناوردا[۵] را بر حسب تحلیل‌های آزاد مینیمال بیان کردند.

با معرفی این ناوردا، مسئله یافتن کرانی برای عدد نظم به موضوع جذابی تبدیل گردید و افراد زیادی توانستند کران‌هایی برای این ناوردا پیدا کنند.

در این پایان‌نامه، ما یک قضیه اساسی روی حلقه‌ی چندجمله‌ای ثابت می‌کنیم که نتایج به دست آمده توسط پیتلود[۶]-گیمیگلیانو[۷]-جرامیتا[۸][۱۹۹۵]، چندلر[۹] [۱۹۹۷]، سیدمن[۱۰] [۲۰۰۲]، کُنکا[۱۱]-هرزوگ[۱۲] [۲۰۰۳] و کاویگلیا[۱۳] [۲۰۰۳] را در بر می‌گیرد.

فصل اول این تحقیق، شامل مطالبی از جبر جابجایی و همولوژی است که در فصول بعد از آنها استفاده می‌کنیم. در فصل دوم دنباله‌های طیفی را معرفی می‌کنیم که نقشی مهمی در اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه دارد. در فصل سوم، ابتدا مفهوم تحلیل آزاد مدرج را معرفی و چگونگی محاسبه آن را بیان می‌کنیم و در بخش بعد عدد نظم را برحسب تحلیل آزاد مینیمال تعریف می‌کنیم و در ادامه تعاریف معادل آن را بر حسب Tor، Ext، کوهمولوژی موضعی و برش‌ها[۱۴] بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم که در واقع فصل اصلی پایان‌نامه است، M و N را دو S-مدول مدرج متناهی مولد در نظر می‌گیریم که S حلقه‌ی چندجمله‌ای مدرج استاندارد $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ روی میدان K با ایده‌ال همگن ماکسیمال $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ است و فرض می‌کنیم بعد کرول $\operatorname{Tor}_1^S(M, N)$ کمتر یا مساوی یک است.

با مفروضات فوق، در قضیه ۴-۱-۱ کران بالایی برای عدد نظم $H_{\mathfrak{m}}^i(\operatorname{Tor}_k^S(M, N))$ بر حسب اعداد بتی مدرج مدولهای M و N می‌یابیم. از این قضیه نتیجه مهم زیر را به

---

[۱] Mamford [۲] Castelnuovo regularity [۳] Sheaf cohomology [۴] Ooishi [۵] Invariant [۶] Pitteloud [۷] Gimigliano [۸] Geramita [۹] Chandler [۱۰] Sidman [۱۱] Conca [۱۲] Herzog [۱۳] Caviglia [۱۴] Truncations

دست می‌آوریم

$$\operatorname{reg}\operatorname{Tor}_k(M,N)\leq \operatorname{reg}M+\operatorname{reg}N+k.$$

که در حالت $k=0$ کران بالایی برای عدد نظم حاصل‌ضرب تانسوری $M\underset{S}{\otimes}N$ به دست می‌دهد که در سال ۲۰۰۲، سیدمن[۱] در [۲۷] و در سال ۲۰۰۳ کاویگلیا[۲] در [۹] هر یک با روش‌هایی متفاوتی پیدا کردند.

در ادامه روابط جالبی بین اعداد بتی مدرج به دست می‌آوریم. برای نمونه نشان می‌دهیم اگر $I\subseteq S$ یک ایده‌ال و $M=N=S/I$ مدول‌هایی دوری با بعد کمتر یا مساوی یک باشند آنگاه تابع $p\longrightarrow t_p(S/I)$ در شرط تحدب ضعیفِ

$$t_n(S/I)\leq t_p(S/I)+t_{n-p}(S/I)$$

برای هر $1\leq p\leq n$ صدق می‌کند. که در آن $t_p(S/I)$ بزرگترین درجه از مولدهای مینیمال همگنِ p-اُمین سیزیجی S/I است.

در بخش سوم این فصل با اثبات قضایایی برای حاصل‌ضرب ایده‌ال‌ها، شرایطی را فراهم می‌آوریم که توان‌های یک ایده‌ال دارای تحلیل خطی باشند. در این بخش فرضیه‌ای[۳] که اولریخ[۴] و آیزنباد[۵] در [۱۵] به شرح زیر مطرح نمودند را در حالت $n=3$ و برای ایده‌ال‌های تک‌جمله‌ای ثابت می‌کنیم.

فرضیه. فرض کنید $I\subseteq S$ ایده‌الی $\mathfrak{m}$-اولیه با تولید یکسان از درجه d و به طور خطی نمایش‌پذیر باشد. در این صورت $I^{n-1}=\mathfrak{m}^{d(n-1)}$.

با قرار دادن $I=J$ در نتیجه زیر، فرضیه فوق در حالت $n=3$ ثابت می‌شود.

نتیجه؟؟. فرض کنید I و J ایده‌ال‌هایی همگن از S با تولید یکسان از درجه‌ی d و با بعُدهای کمتر یا مساوی یک باشند. در این صورت اگر تحلیل‌های I و J برای $\lceil (n-1)/2\rceil$ مرحله خطی باشند.(برای نمونه، اگر I و J دارای نمایش خطی باشند و $n\leq 3$)، آنگاه IJ تحلیل خطی دارد. بویژه اگر I و J ایده‌ال‌های $\mathfrak{m}$-اولیه باشند آنگاه $IJ=\mathfrak{m}^{2d}$.

در آخر قضیه‌ای از رومر [۶] در [۲۵] را اثبات می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که تحت چه شرایطی همه‌ی توان‌های یک ایده‌ال، تحلیل خطی دارند.

---

[۱]Sidman [۲]Caviglia [۳]Conjecture [۴]Ulrich [۵]Eisenbud [۶]Römer

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$V(I)$ مجموعه ایده‌ال‌های اول شامل I

$\mathrm{Supp}_R(M)$ تکیه‌گاه R- مدول M

$\mathrm{Spec}(R)$ مجموعه ایده‌ال‌های اول حلقه R

$\mathrm{Ass}_R(M)$ ایده‌ال‌های اول وابسته R- مدول M

$\mathrm{Ann}_R(M)$ پوچساز R- مدول M

$Z_R(M)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R- مدول M

$\dim R$ بعد حلقه R

$\dim_R(M)$ بعد کرول R- مدول M

$\mathrm{codim}(-)$ همبعد

$\mathrm{ht}(-)$ ارتفاع

$\mathrm{Max}(R)$ مجموعه ایده‌ال‌های ماکسیمال حلقه R

$l_R(M)$ طول R- مدول M

$\mathrm{grade}_R(I, M)$ طول M- رشته منظم ماکسیمال در I

$\mathrm{depth}_R(M)$ طول M- رشته منظم ماکسیمال در ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$

$\mathrm{Socle}_R(M)$ ساکل R- مدول M

$\mathrm{pd}_R(M)$ بعد پروژکتیو R- مدول M

$\mathbf{Mod}(\mathbf{R})$ رسته‌ی R- مدول‌ها

$H^i_{\mathfrak{m}}(-)$ i- امین کوهمولوژی موضعی

$\deg(x)$ درجه‌ی عنصر همگن x

$K_\bullet(\underline{x}; R)$ همبافت کزول R نسبت به $\underline{x}$

$H_p(\underline{x}; M)$ p- امین مدول همولوژی همبافت کزول M نسبت به $\underline{x}$

$S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای روی میدان K

$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ ایده‌ال همگن ماکسیمال حلقه چندجمله‌ای S

$\mathrm{Mon}(S)$ مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌هایِ S

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایایی از نظریه رسته را که نقش مهمی در فهم بهتر مطالب دارند، یادآور می‌شویم. فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم جبر جامع آشنایی دارد. در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور ازنیم گروه R، نیم گروه یکدار است.

۱ - ۱ مفاهیم و قضایایی از نظریه رسته

تعریف ۱ - ۱ - ۱ ($strongly flat$). S -سیستم A هموار قوی است گر تابعگون $- \otimes A$ عقب بر و برابرساز را حفظ کند.

تعریف ۱ - ۱ - ۲ ($condition P$). S -سیستم A در شرط P صدق میکند اگر برای هر $a, a' \in A$ و $s, s' \in S$ به طوریکه $as = a's'$ باشد آنگاه $a'' \in A$ و $u, v \in S$ موجود باشند به طوریکه $a = a''u$ و $a' = a''v$ و $us = vs'$.

تعریف ۱ - ۱ - ۳ ($condition E$). S -سیستم A در شرط E صدق میکند اگر برای هر $a \in A$ و $s, s' \in S$ به طوریکه $as = as'$ باشد آنگاه $a' \in A$ و $u \in S$ موجود باشند به طوریکه $a = a'u$ و $us = us'$

لم ۱ - ۱ - ۴. *S-سیستم های هموار قوی وعقب بر هموار یکی هستند یا به عبارت دیگر* $strongly falt = pullback flat$

برهان. نتیجه ۱۶.۵ صفحه ۲۷۲ کتاب کیلپ □

لم ۱ - ۱ - ۵. *S -سیستمA هموار قوی ($strongly flat$) اگر وتنها اگر درشرط P و E صدق کند.*

برهان. برهان قضیه در قضیه صفحه ۲۶۸ کتاب کیلپ است [۲۸] □

قضیه ۱ - ۱ - ۶. *فرض کنید ρ یک همنهشتی راست از تکواره S باشد. آنگاه $\frac{S}{\rho}$ در شرط P صدق می کند اگر و تنها اگر برای هر $s, t \in S$ که $s\rho t$* ***نتیجه دهد*** *$u, v \in S$ که $u\rho 1 \rho t$ موجود باشند به طوریکه $us = vt$*

برهان. برهان در صفحه ۲۵۱ کتاب کیلپ □

قضیه ۱ - ۱ - ۷.

برهان. □

تعریف ۱-۱-۸ ($left unitary$)**.** زیر مونوید T از S یکانی چپ گویند اگر وتنها اگر $s \in S$و $t, ts \in S$ باشد آنگاه $s \in T$ باشد.

قضیه ۱-۱-۹. *فرض کنید T یک زیرمونوید ازمونوید S باشد آنگاه $T = [1]_\rho$ برای یک همنهشتی راست ρ از S اگر وتنها اگر T، زیر مونید یکانی چپ از S باشد.*

برهان. رفت: فرض کنیم ρ یک همنهشتی راست از S باشد و $T = [1]_\rho$ زیر مونوید از S است زیرا اگر $t_1, t_2 \in T$ باشد نشان میدهیم که $t_1t_2 \in T$.اگر $t_1, t_2 \in T$ آنگاه داریم که $1\rho t_1$ و $1\rho t_2$. حال از اینکه $1\rho t_1$ است و ρ یک همنهشتی راست از S است نتیجه می شود که $t_2\rho t_1t_2$ است و لذا داریم

$1\rho t_2\rho t_1t_2 \Rightarrow 1\rho t_1t_2 \Rightarrow t_1t_2 \in T = [1]_\rho$

حال اگر $t, ts \in T$ که $s \in S$ آنگاه چون $t \in T$درداریم $1\rho t$که چون ρ همنهشتی راست است داریم $s\rho ts$ حال داریم

$1\rho ts\rho s \Rightarrow 1\rho s \Rightarrow s \in T = [1]_\rho$

بنابراین T یک زیر مونوید یکانی چپ است.

برعکس: فرض کنید T یک زیرمونوید یکانی چپ از S باشد. قرار دهید $X = T \times T$ و $\rho = \rho(T \times T)$. حال چون T ناتهی است پس $t \in T$ موجود است و چون $1 \in S$ است وداریم $t, t.1 \in T$ وبا توجه به یکانی چپ بودن T داریم $1 \in T$ پس داریم $T \subseteq [1]_\rho$ (۱).

حال فرض کنیم $t \in [1]_\rho$ و $t \neq 1$ پس داریم $1\rho t$ بنابراین طبق لم [۹،۱.۴.۳۷] ، عضوهای $t_1, ..., t_n, r_1, ..., r_n \in T$ و $w_1, ..., w_n \in S$ موجود است به طوریکه $(t_i, r_i) \in X$ برای $1 \leqslant i \leqslant n$ به طوریکه

$$1 = t_1w_1 \qquad r_2w_2 = t_3w_3 \qquad .... \qquad r_nw_n = t$$
$$r_1w_1 = t_2w_2 \qquad r_3w_3 = t_4w_4 \qquad ....$$

حال چون $1, t_1 \in T$ و $1 = t_1w_1$ پس داریم $t_1, t_1w_1 \in T$ حال چون T یکانی چپ است پس $w_1 \in T$ است.بنابراین $t_2w_2 = r_1w_1 \in T$ و چون $t_2, t_2w_2 \in T$ و T یکانی چپ است پس $w_2 \in T$ است.واگر این روند را ادامه دهیم نتیجه می شود که $w_n \in T$ پس داریم $t = r_nw_n \in T$ زیرا $r_n, w_n \in T$.

بنابراین $t \in T$ وچون t دلخواه بود پس $[1]_\rho \subseteq T$ (۲) است.

حال از (۱) و (۲) داریم $T = [1]_\rho$. □

تعریف ۱-۱-۱۰ ($leftcolapsible$).

تعریف ۱-۱-۱۱ ($rightreversible$).

قضیه ۱-۱-۱۲. *فرض کنید S یک مونوید باشد و P زیر مونوید له شدنی (از راست معکوس پذیر) از S باشد آنگاه $\sigma = (P \times P)^{\neq}$ همنهشتی راست تولید شده توسط $(P \times P)$ است به طوریکه $P \subseteq [1]_\sigma$ و $[1]_\sigma$ له شدنی از چپ (از راست معکوس پذیر) است و $\frac{S}{\sigma}$ هموار قوی است (درشرط P صدق میکند).*

فصل ۲

پوشش سیستم ها

۲-۱ پوشش و برو‌ریختی هم اساسی

تعریف ۲-۱-۱. فرض کنید S یک مونوید باشد و A یک S- سیستم باشد. S- سیستم C هم راه با S- بروریختی $f : C \longrightarrow A$ را یک پوشش از S-سیستم A گویند اگر هیچ زیرسیستم اکید B از C موجود نباشد به طوریکه f تحدیدش به B یا $f\mid_B$ پوشا باشد.ما معمولا C را یک پوشش گوییم.

به راحتی میتوان دید که هر S- سیستم دارای یک پوشش که همان خودش است میباشد.اما بعضی از S- سیستم ها دارای یک پوشش سره هستن.و.....(ادامشو بنویس)
با توجه به [۹, ۳٫۱۷٫۱۹] هر پوشش از یک S- سیستم دوری باید دوری باشد.

تعریف ۲-۱-۲. فرض کنید S یک مونوید باشد و $f : C \longrightarrow A$ یک S- بروریختی باشد گوییم f هم اساسی است اگر برای هر S- سیستم B و هر S- نگاشت $g : B \longrightarrow C$ اگر fg برو ریختی (epi) باشد آنگاه g نیز بروریختی باشد.

لم ۲-۱-۳. *$f : C \longrightarrow A$ یک پوشش از A است اگر وتنها اگر f بروریختی هم اساسی باشد.*

برهان. رفت:

فرض کنید $f : C \longrightarrow A$ یک پوشش باشد و $g : B \longrightarrow C$ به طوری باشد که $fg : B \longrightarrow A$ بروریختی باشد ثابت می کنیم که g نیز بروریختی است . فرض کنیم (فرض خلف) g بروریختی نباشد پس داریم $g(B) \subsetneqq C$ و $f\mid_{g(B)}= fg$ بروریختی است که تناقض با پوشش بودن دارد.پس g بروریختی است.

برعکس:

فرض کنیم $f : C \longrightarrow A$ بروریختی هماساسی باشد و B زیرسیستم اکیدی از C باشد. چون $g : B \hookrightarrow C$ پوشا نیست و f بروریختی هم اساسی است پس $f\mid_B= fg : B \longrightarrow A$ پوشا نیست.
پس $f : C \longrightarrow A$ یک پوشش است. □

لم ۲-۱-۴. *فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک S- بروریختی هم اساسی باشد. آنگاه A دوری است اگر وتنها اگر B دوری باشد.*

برهان. رفت:

فرض کنید A دوری باشد چون f پوشاست پس $f(A) = B$. حال چون A دوری است پس $f(A)$ نیز دوری است پس B دوری است.

برعکس:

اگر B دوری باشد چون $f : A \longrightarrow B$ یک S- بروریختی هم اساسی استو طبق لم قبل $f : A \longrightarrow B$ یک پوشش است وطبق [۹, ۳/۱۷/۱۹] ، A نیز دوری است. $\square$

لم ۲-۱-۵. *فرض کنید S یک مونوید باشد و σ, σ' همنهشتی های راست از S باشند.آنگاه $\frac{S}{\sigma'}$ بایک زیر سیستم دوری از $\frac{S}{\sigma}$ ایزوموفیسم است اگر وتنها اگر $u \in S$ موجود باشد به طوریکه*

$$\sigma' = \{(s,t) \in S \times S; (us, ut) \in \sigma\}$$

برهان. رفت:

برای هر S- سیستم A و هر $a \in A$ ، $\{(s,t) \in S \times S; as = at\}$ یک همنهشتی راست است. بنابراین برای هر همنهشتی σ و $u \in S$ ، $\{(s,t) \in S \times S; (u\sigma)s = (u\sigma)t\}$ یک همنهشتی راست است.

حال اگر $u \in S$ موجود باشد به طوریکه $\sigma' = \{(s,t) \in S \times S; (us, ut) \in \sigma\}$ آنگاه $\dfrac{S}{\sigma'} \longrightarrow \dfrac{S}{\sigma}$ با تعریف $s\sigma' \longmapsto (us)\sigma$خوش تعریف است و $S - monomorphism$ است.

برعکس:

اگر $h : \dfrac{S}{\sigma'} \longrightarrow \frac{S}{\sigma}$ یک $S - mono$ باشد. فرض کنید $h(۱\sigma') = u\sigma$ آنگاه $h(s\sigma') = sh(۱\sigma') = (us)\sigma$ و چون h خوشتعریف ویک به یک است آنگاه $\sigma' = \{(s,t) \in S \times S; (us, ut) \in \sigma\}$ $\square$

σ' در لم قبل را با σ_u نمایش میدهیم یعنی $\sigma_u = \{(s,t) \in S \times S; \exists u \in S; (us, ut) \in \sigma\}$. در بعضی از مقاله ها به جای $s(u\sigma)t$ ، $s\sigma_u t$ را به کار میبرند.

لم ۲-۱-۶. *فرض کنید σ یک همنهشتی راست روی S و $u \in S$ باشد. $S - mono$ ، $h : \frac{S}{\sigma_u} \longrightarrow \frac{S}{\sigma}$ با تعریف $s\sigma_u \longmapsto (us)\sigma$ را درنظر بگیرید. آنگاه h پوشاست اگروتنها اگر $uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$*

برهان. رفت:

فرض کنید$uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$ و $[x]_\sigma \in \dfrac{S}{\sigma}$ باشد. حال چون $uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$ است پس $s \in S$ موجود است به طوریکه $us\sigma۱$ حال داریم:

$$[x]_\sigma = [۱]_\sigma x = [us]_\sigma x = [usx]_\sigma$$

حال داریم:

$$h([sx]_{\sigma_u}) = [usx]_\sigma = [x]_\sigma$$

بنابراین h پوشاست.

برعکس:

فرض کنیم h پوشا باشد و فرض کنیم (فرض خلف) $uS\cap[۱]_\sigma=\emptyset$ باشد. یعنی به ازای هر $s\in S$ ، $us\sigma ۱$ نیست.حال فرض کنیم $[x]_\sigma \in \frac{S}{\sigma}$ باشد داریم:

$$[x]_\sigma=[۱]_\sigma x\neq [us]_\sigma x=[usx]_\sigma \qquad \forall s\in S$$

که این نشان می دهد:

$$\forall s\in S \qquad h([sx]_\sigma)\neq [x]_\sigma$$

که این نشان می دهد که h پوشا نیست که یک تناقض با فرض می باشد.بنابراین $uS\cap[۱]_\sigma\neq\emptyset$. $\square$

اکنون ما نشان می دهیم که اگر یک S- سیستم دوری ، پوشش سره داشته باشد آنگاه آن طبیعی است.

لم ۲-۱-۷. *فرض کنید S یک مونوید باشد و ρ یک همنهشتی راست از S باشد. اگر σ یک همنهشتی راست روی S باشد به طوریکه $f:\frac{S}{\sigma}\longrightarrow \frac{S}{\rho}$ یک بروریختی هم اساسی باشد آنگاه $u\in S$ موجود باشد به طوریکه $\frac{S}{\sigma}\cong\frac{S}{\sigma_u}$ و $f':\frac{S}{\sigma_u}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ با تعریف $s\sigma_u\longmapsto s\rho$ یک S- بروریختی هم اساسی است. خصوصاً $[۱]_{\sigma_u}\subseteq[۱]_\rho$.*

برهان. چون $f:\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ پوشاست پس $u\in S$ موجود است به طوریکه $f(u\sigma)=۱\rho$ $(*)$. فرض کنید $\sigma'=\sigma_u$ حال چون نگاشت $\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\sigma'}$ با تعریف $(us)\sigma\longmapsto s\sigma'$ یک $S-mono$ است(زیرا $\sigma'=\sigma_u$) که ترکیب آن با f پوشاست. حال چون $\frac{S}{\sigma}$ یک پوشش برای $\frac{S}{\rho}$ است(باتوجه به لم ۲.۱.۳). وچون f بروریختی هم اساسی است پس نگاشت $\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\sigma'}$ پوشا نیز است. پس داریم $\frac{S}{\sigma}\cong\frac{S}{\sigma'}$ و $f':\frac{S}{\sigma'}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ با تعریف $s\sigma'\longmapsto s\rho$ پوشا است(با توجه به $(*)$). وبه راحتی می توان دید که $[۱]_{\sigma'}\subseteq[۱]_\rho$. $\square$

اکنون ما آماده ایم که یکی از قضایای اصلی را بیان کنیم.

قضیه ۲-۱-۸. *فرض کنید S یک مونوید باشد و $\frac{S}{\rho}$ یک S- سیستم دوری باشد. نگاشت $f:\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ با تعریف $s\sigma\longmapsto s\rho$ یک بروریختی هم اساسی است اگر وتنها اگر*

$$\sigma\subseteq\rho \quad\wedge\quad \forall u\in[۱]_\rho\ ;\ \ uS\cap[۱]_\sigma\neq\emptyset$$

برهان. ابتدا برای هر S- سیستم دوری $\frac{S}{\rho}$ و$u\in S$ در نظر میگیریم:

$$\frac{S}{\rho_u}\cong\{[us]_\rho; s\in S\}$$

که زیر سیستمی از $\frac{S}{\rho}$ است.

فرض کنید $f:\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ یک برووریختی هم اساسی باشد.$\sigma\subseteq\rho$چون f خوشتعریف است. برای هر $u\in[۱]_\rho$ ، $f|_{\frac{S}{\sigma_u}}:\frac{S}{\sigma_u}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ پوشاست چون f هم اساسی است.ما باید داشته باشیم $[۱]_\sigma\in\frac{S}{\sigma_u}$ وبنابراین $?.uS\cap[۱]_\sigma=\emptyset$

برعکس:

فرض کنیم شرط ها برقرار باشد. چوم $\sigma\subseteq\rho$ است پس f خوشتعریف است. فرض کنید A یک زیر سیستمی از $\frac{S}{\sigma}$ باشد و $f|_A$ پوشا باشد. آنگاه چون $f|_A$ پوشا است داریم برای ۱ρ عضو $u\sigma\in A$ موجود است به طوریکه $۱\rho=f(u\sigma)=u\rho$. بنابراین $u\rho۱$. چون $uS\cap[۱]_\sigma\neq\emptyset$ پس $t\in S$ موجود است به طوریکه $ut\sigma۱$. و چون σ همنهشتی راست است داریم $s\sigma uts$ است وبنابراین $s\sigma\in A$ برای هر $s\sigma\in\frac{S}{\sigma}$ پس $A\subseteq\frac{S}{\sigma}$ است و چون A زیر سیستمی از $\frac{S}{\sigma}$ است پس $A=\frac{S}{\sigma}$ و بنابراین طبق تعریف f یک پوشش است. □

توضیحاتشو بنویس

قضیه ۲-۱-۹. *فرض کنید S یک مونوید باشد و $\frac{S}{\rho}$ یک S- سیستم دوری باشد. اگر R یک زیر مونوید از $[۱]_\rho$ باشد به طوریکه برای هر $u\in[۱]_\rho$ ، $uS\cap R\neq\emptyset$ باشد آنگاه همنهشتی راست σ روی S موجود است به طوریکه $R\subseteq[۱]_\sigma$ و $\frac{S}{\sigma}$ یک پوشش از $\frac{S}{\rho}$ است.*

علاوه بر این $R=[۱]_\sigma$ اگر وتنها اگر R زیر مونوید یکانی از S باشد.

برهان. همنهشتی راست σ روی S را به صورت $\sigma=(R\times R)^\sharp$ تعریف می کنیم. آنگاه واضح است که $R\subseteq[۱]_\sigma$ (?). نگاشت $f:\frac{S}{\sigma}\longrightarrow\frac{S}{\rho}$ را به صورت $s\sigma\longmapsto s\rho$ تعریف می کنیم. می دانیم f خوشتعریف و S- برووریختی است.(?).

چون $R\subseteq[۱]_\rho$ است آنگاه $R\{R\subseteq\rho$ و بنابراین $\sigma=(R\times R)^\sharp$ است. و جون برای هر $u\in[۱]_\rho$ ، $uS\cap[۱]_\sigma\neq\emptyset$ و چون $uS\cap R\neq\emptyset$ و $R\subseteq[۱]_\sigma$ است پس طبق قضیه قبلی f برووریختی هم اساسی است.

طبق لم فصل اول داریم $R=[۱]_\sigma$ اگر وتنها اگر R زیرمونوید یکانی از S باشد. □

نتیجه ۲-۱-۱۰. *S- سیستم دوری $\frac{S}{\sigma}$ یک پوشش از S- سیستم تک عضوی Θ است اگر و تنها اگر برای هر $u\in S$ وجود داشته باشد $s\in S$ به طوریکه $us\in[۱]_\sigma$.*

برهان. فرض کنیم برای هر $u\in S$ عضوی مانند $s\in S$ موجود باشد به طوریکه $us\in[۱]_\sigma$ پس

$uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$ است وبنابه قضیه ۸.۱.۲ $f : \frac{S}{\sigma} \longrightarrow \frac{S}{\Theta}$ برووریختی هم اساسی است. بنابراین $\frac{S}{\sigma}$ یک پوشش برای $\frac{S}{\Theta}$ می باشد.

برعکس:

فرض کنیم $\frac{S}{\sigma}$ یک پوشش از Θ باشد پس $f : \frac{S}{\sigma} \longrightarrow \frac{S}{\Theta}$ یک برووریختی هم اساسی است و با توجه قضیه ۸.۱.۲ به ازای هر $u \in [۱]$ داریم $uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$ پس $s \in S$ موجود است به طوریکه $us \in [۱]_\sigma$. □

قضیه ۲-۱-۱۱. *اگر S یک مونوید باشد و $\frac{S}{\rho}$ یک S- سیستم دوری باشد آنگاه نگاشت $\frac{S}{\rho} \longrightarrow S$ هم اساسی است اگر و تنها اگر $[۱]_\rho$ زیرگروهی از S باشد.*

برهان. رفت:

اگر $\frac{S}{\rho} \longrightarrow S$ هم اساسی باشد بنا به قضیه ۸.۱.۲ میدانیم برای هر $u \in [۱]_\rho$ عضو $s \in S$ موجود است به طوریکه $us = ۱$. اما چون $u\rho۱$ پس داریم $s\rho us = ۱$ وبنابراین $s \in [۱]_\rho$ است واین نتیجه میدهد که $[۱]_\rho$ زیر گروهی از S است.

برعکس:

اگر $[۱]_\rho$ یک زیرگروه از S باشد.آنگاه برای $u \in [۱]_\rho$ داریم $uu' \in \{۱\}$ وطبق قضیه ۸.۱.۲ نگاشت $\frac{S}{\rho} \longrightarrow S$ با تعریف $s \longmapsto s\rho$ هم اساسی است. □

تعریف ۲-۱-۱۲ ($rightsimple$).

قضیه ۲-۱-۱۳. *اگر S یک نیم گروه ساده از راست با ۱ الحاقی باشد و اگر $\sigma \subseteq \rho$ باشد که σ و ρ همنهشتی های راست روی S هستند. که $\{۱\} \neq [۱]_\sigma$ آنگاه نگاشت $\frac{S}{\sigma} \longrightarrow \frac{S}{\rho}$ با تعریف $s\sigma \longmapsto s\rho$ یک برووریختی هم اساسی است.*

برهان. چون برای هر $u \in S \backslash \{۱\}$ ، $u(S \backslash \{۱\}) = S \backslash \{۱\}$ است. پس داریم $uS \cap [۱]_\sigma \neq \emptyset$ است و چون $\sigma \subseteq \rho$ است با توجه به قضبه ۸.۱.۲ نگاشت $\frac{S}{\sigma} \longrightarrow \frac{S}{\rho}$ با تعریف $s\sigma \longmapsto s\rho$ برووریختی هم اساسی است. □

۲-۲ پوشش قویاً هموار($strongly\ flat\ covers$)

تعریف ۲-۲-۱. فرض کنید S یک مونوید باشد و A یک S- سیستم باشد. C همراه با S- برووریختی $f : C \longrightarrow A$ یک پوشش قویاً هموار از A است اگر C قویا هموار ($strongly\ \ flat$) و f ، S- برووریختی هم اساسی باشد.

قضیه ۲-۲-۲. *اگر S یک مونوید باشد آنگاه S- سیستم دوری $\frac{S}{\rho}$ پوشش قویا هموار است اگر وتنها اگر $[1]_\rho$ شامل یک زیر مونوید له شدنی از چپ R باشد به طوریکه برای هر $u \in [1]_\rho$ ، $uS \cap R \neq \emptyset$.*

برهان. $\square$

فصل ۳

تحلیل آزاد مدرج و عدد نظم

با توجه به این که ابزار کار ما در این پایان نامه حلقه‌چندجمله‌ای است بیشتر قضایا و لم‌ها روی این حلقه بیان شده است.

۳-۱ تحلیل آزاد مدرج و اعداد بتی مدرج

تعریف و نکته ۳-۱-۱. *$R-$ مدول F را آزاد مدرج گوییم، هرگاه F دارای پایه‌ای باشد که همه‌ی اعضای آن همگن باشد به عبارتی خانواده‌ای از اعداد صحیح $\{n_i\}_{i\in I}$ چنان باشد که $F \cong \bigoplus\limits_{i\in I} R(n_i)$ بنابراین می‌توان به سادگی نشان داد که هر مدول مدرج، تصویر همریخت یک مدول آزاد مدرج است، یعنی اگر M یک $R-$مدول مدرج باشد و $\{m_i\}_{i\in I}$ مجموعه مولدی برای M باشد که برای هر $i \in I$، $\deg(m_i) = n_i$ آنگاه $R-$همریختی زیر همگن و پوشاست*

$$\varphi : \bigoplus_{i\in I} R(-n_i) \longrightarrow M$$

$$e_i \longmapsto m_i$$

تعریف ۳-۱-۲. فرض کنید M یک R-مدول مدرج باشد، آنگاه یک تحلیل آزاد مدرج از M، رشته‌ای دقیق به صورت

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

است که در آن F_iها، R-مدول‌های آزاد مدرج هستند و d_iها، R-همریختی‌های همگن‌اند.

تعریف ۳-۱-۳. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه *موضعی و M یک $R-$مدول مدرج با تحلیل آزاد مدرج به صورت

$$\mathbf{F}: \quad \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

باشد. گوییم تحلیل فوق مینیمال است هرگاه برای هر $i \geq 1$، $\mathrm{Im}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$، و به عبارت دیگر نگاشت‌های همبافت $\mathbf{F} \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ،همه برابر صفر باشند.

۳-۲ عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد

در این بخش به معرفی عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد به همراه برخی تعاریف معادل با آن و یک سری قضایا و نتایج در مورد آن می‌پردازیم.
فرض بر این است که $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی میدان K با ایده‌ال ماکسیمال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است.

تعریف ۳-۲-۱ (عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد). فرض کنید M یک $S-$مدول مدرج متناهی مولد با تحلیل آزاد مینیمال مدرج به صورت

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

باشد.(توجه شود که بنابر قضیه سیزیجی هیلبرت **??** و گزاره **??** طول این تحلیل متناهی و با بعد پروژکتیو M برابر است.).
گیریم b_i ماکسیمم درجه از مولدهای F_i باشد.برای عدد صحیح r، مدول M را $r-$منظم گوییم هرگاه برای هر $i = 0, \dots, s$، $b_i - i \leq r$ باشد. و عدد نظم کاستلنیوو-مامفورد یا به اختصار عدد نظم M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{reg}(M) = \min\{r : \ b_i - i \leq r \ \ ; i = 0, \dots, s\}$$

که این خود معادل است با

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{b_i - i : \ i = 0, \dots, s\}.$$

بنابراین، می‌توان گفت که S-مدول M، r-منظم است هرگاه $\operatorname{reg}(M) \leq r$. بعلاوه اگر $M = 0$ تعریف می‌کنیم $\operatorname{reg}(M) = -\infty$.

فصل ۴

عدد نظم مدول همولوژی Tor

مقدمه: در سراسر این فصل، $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با ساختار استاندارد مدرج روی میدان K و ایده‌ال ماکسیمال همگن $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ است. بعد کرول مدول M را با $\dim M$ و بعد فضای برداری M را با $\dim_K M$ نمایش می‌دهیم. برای S- مدول مدرج متناهی مولد M و ایده‌ال I از S با توجه به نتیجه **؟؟**، $\operatorname{codim} M = n - \dim M$ و $\operatorname{codim} I = n - \dim I$.

همان طور که در تعریف **؟؟**، بیان شد منظور از $\dim I$ همان $\dim S/I$ است.

در این فصل برای عدد نظم S- مدول مدرج متناهی مولد M از تعابیر معادل آن که در بخش **۳-۲** بیان شد استفاده می‌کنیم یعنی

$$\operatorname{reg}(M) = \max_j \left\{\operatorname{reg} H^j_{\mathfrak{m}}(M) + j\right\}$$

و

$$\operatorname{reg}(M) = \max_p \left\{\operatorname{reg} \operatorname{Tor}^S_p(M, K) - p\right\}$$

و یا به عبارتی با توجه به ملاحظه **؟؟**،

$$\operatorname{reg}(M) = \max_p \left\{t_p(M) - p\right\}$$

که در آن $t_p(M) = \operatorname{reg} \operatorname{Tor}^S_p(M, K) = \max\{j : \beta_{ij} \neq 0\}$.
اگر $M = 0$ تعریف می‌کنیم $\operatorname{reg}(M) = -\infty$.

۴-۱ کران روی عدد نظم کوهمولوژی موضعی Tor

در این بخش به بیان یک قضیه اساسی می‌پردازیم که برای اثبات آن نیازمند به ابزار کارآمد دنباله طیفی در فصل ۲ هستیم.

قضیه ۴-۱-۱. *فرض کنید M و N دو S- مدول مدرج متناهی مولد و j و k اعدادی صحیح باشند و $\dim \operatorname{Tor}^S_1(M, N) \leq 1$. در این صورت برای هر p و q که $p + q = n - j + k$،*

$$\operatorname{reg} H^j_{\mathfrak{m}}\big(\operatorname{Tor}^S_k(M, N)\big) \leq \max\{X, Y, Z\}$$

که در آن

$$X = t_p(M) + t_q(N) - n$$

$$Y = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'>p}} \Big\{ t_{p'}(M) + \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^{n-q'}(N) \Big\}$$

$$Z = \max_{\substack{p'+q'=n-j+k \\ p'<p}} \Big\{ \operatorname{reg} H_{\mathfrak{m}}^{n-p'}(M) + t_{q'}(N) \Big\}.$$

منابع و مآخذ

[۱] س. یاسمی، م. پورنکی، مقدمه‌ای بر نظریه مدول‌ها. انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۶.

[2] R.B. Ash , A course in commutative algebra., Lecture notes 2003.

[3] M.F. Atyah , I.G.Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison–Wesley, London (1969).

[4] M. Auslander, Modules over unramified regular local rings. Illinois J. Math.,5:631–647, 1961.

[5] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] M.P. Brodmann, R.Y. Sharp, Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 60, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[7] W. Bruns, J. Herzog, Cohen–Macaulay Rings, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 39, Cambridge University Press,Cambridge, 1993.

[8] W. Bruns, U. Vetter, Determinantal Rings. Springer LNM 1327, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] G. Caviglia, Bounds on the Castelnuovo-Mumford regularity of tensor products, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear), preprint, 2003.

[10] G. Caviglia, Koszul algebras, Castelnuovo-Mumford regularity and generic initial ideals, Ph.D. thesis, University of Kansas, 2004.

[11] A. Conca, Regularity jumps for powers of ideals, http://www.arxiv.org/math.AC/0310493, 2003.

[12] A. Conca, J. Herzog and T. Hibi, Rigid resolutions and big Betti numbers, Comment. Math. Helv. 79 (2004),826–839.

[13] D. Cox, J. Little,D. O'Shea, Using Algebraic Geometry. Springer (1992).

[14] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry. Springer (1995).

[15] D. Eisenbud, C. Huneke and B. Ulrich, The regularity of Tor and graded Betti numbers, Amer. J. Math. 128 (2006) 573–605.

[16] D. Eisenbud, Geometry of Syzygies, Springer-Verlag, New York, 2004.

[17] H.B. Foxby, Homological algebra, Lecture notes.

[18] D.R. Grayson, M. Stillman, Macaulay 2, A Software System for Research in Algebraic Geometry, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[19] J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals,Springer London Dordrecht Heidelberg New York,2010.

[20] J. Herzog, T.Hibi, X.Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution. Math. Scand., 95, 23–32 (2004).

[21] J.P. Serre, Local Algebra,Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000.

[22] T. Marley, Graded rings and modules, Lecture notes.

[23] S. Lichtenbaum, On the vanishing of Tor in regular local rings. Illinois J. Math.,10:220–226, 1966.

[24] I. Peeva, Graded syzygies,Springer-Verlag London Limited 2010.

[25] T. Römer, Homological properties of bigraded algebras. Ill. J. Math., 45, 1361–1376 (2001).

[26] J.J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Springer Science+Business,2009.

[27] J. Sidman, On the Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideal sheaves, Adv.Geom. 2 (2002), 219–229.

[28] R.Y. Sharp, Steps in commutative algebra , Cambridge University Press. 1990.

[29] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, New York, 1994.

[30] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra. Vol. I, II, Springer (1960).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمالی	Probabilistic
ارزیابی	Valuation
اندازه	Measure
پایدار	Stably
توپولوژی ضعیف	Weak Topology
دامنه‌توانی	Powerdomain
فضای تابع	Function Space
دامنه معنایی	Semantic Domain
قطعه‌برنامه	Program Fragment
موضعی منظم	Regular local
مرتب	Ordered

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار	Dcpo
فضای تابع	Function Space
اندازه	Measure
مرتب	Ordered
دامنه‌توانی	Powerdomain
احتمالی	Probabilistic
قطعه‌برنامه	Program Fragment
دامنه معنایی	Semantic Domain
پایدار	Stably
ارزیابی	Valuation
توپولوژی ضعیف	Weak Topology

Abstract

Let $S = K[x_1, \ldots, x_n]$, let M , N be finitely generated graded S-modules, and let $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq S$. We give bounds for the regularity of the local cohomology of $\mathrm{Tor}_k(M, N)$ in terms of the graded Betti numbers of M and N, under the assumption that $\dim \mathrm{Tor}_1(M, N) \leq 1$. We apply the results to syzygies, products and powers of ideals. For example we show that any homogeneous linearly presented $\mathfrak{m}$-primary ideal has some power equal to a power of $\mathfrak{m}$; and if the first $\lceil (n-1)/2 \rceil$ steps of the resolution of I are linear, then I^2 is a power of $\mathfrak{m}$.
Keywords:
Regularity, Minimal graded free resolution, Local cohomology, Graded betti number

Master of Science
Department of Mathematics

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

On covers of cyclic acts over monoids

Evaluated and approved by thesis committee : as ....

Dr. GH.moghadasi, Supervisor (.) ....

, External Examiner (.) ....

, Internal Examiner (.) ....

February 2011

Master of Science
Department of Mathematics

M.Sc.Thesis

Title of the Thesis

On covers of cyclic acts over monoids

Supervisor
Dr. gholamreza mogadasi

By
rasool rashidi

February 2011