تقدیم به

...

سپاس گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. ...

چکیده

این رساله ...

واژه‌های کلیدی:

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

در این فصل، تعریف‌ها و نمادهایی که در مابقی فصول از آن‌ها استفاده خواهد شد، تعریف می‌کنیم. بنا به مطالب فصل‌های بعدی احتیاج به بیان تعریف‌هایی در گراف و طرح بلوکی داریم. لذا در دو بخش جداگانه آن‌ها را یادآوری می‌کنیم.
برای معادل‌های فارسی واژه‌هایی که در این پایان‌نامه آمده‌اند، از مراجع [۳] و [۱] استفاده کرده‌ایم. در ضمن در اول هر فصل تعاریفی که در آن فصل مورد نیاز است، را خواهیم آورد.

۱-۱ تعریف‌ها و نمادگذاری‌ها در مبحث گراف

برای مفهوم‌ها و نمادهای تعریف نشده در این‌جا می‌توانید به مراجع [۱۰] و [۱۸] مراجعه کنید.

فرض‌کنیم $G = (V, E)$. زیرمجموعه S می‌نامیم هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند. تعداد رأس‌های بزرگ‌ترین مجموعه مستقل G را **عدد استقلال** G می‌نامیم و آن را با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه مستقل از اندازه α را یک α-set می‌نامیم.

به یک زیرمجموعه از رأس‌های دوبه‌دو مجاور در G، یک خوشه می‌گوئیم. اندازه بزرگ‌ترین زیرگراف کامل از گراف G را **عدد خوشه‌ای** G می‌نامیم و آن را $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

زیرمجموعه Q از رئوس گراف $G = (V, E)$ را **پوشش رأسی** می‌نامیم، هرگاه هر یال در E دارای حداقل یک رأس در Q باشد. تعداد رأس‌های کوچک‌ترین مجموعه پوشش رأسی را **عدد پوشش رأسی** می‌نامیم و با نماد $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۱. ([۱۸]صفحه‌ی ۱۱۵) در هر گراف G، $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.

منظور از **حاصل‌ضرب دکارتی** دو گراف G و H، گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G) \times V(H)$ است و دو رأس (u, v) و (u', v') با هم مجاور هستند اگر و فقط اگر یا $v = v'$ و $uu' \in E(G)$ و یا $u = u'$ و $vv' \in E(H)$.
این گراف را با نماد $G \Box H$ نمایش می‌دهیم.

فرض‌کنیم $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. $k-$**رنگ‌آمیزی معتبر** از گراف G نگاشتی مانند $c : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ است، به‌طوری‌که برای هر یال uv در E، $c(u) \neq c(v)$. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را که گراف G یک $k-$رنگ‌آمیزی معتبر داشته باشد، **عدد رنگی رأسی** G می‌نامیم و با نماد $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم. به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, k\}$، $V_i = c^{-1}(i)$ را **کلاس رنگ** iام می‌نامیم. در واقع یک $k-$رنگ‌آمیزی از G یک افراز از رأس‌های G به k زیرمجموعه $V_1, V_2, \dots, V_k$ است به‌طوری‌که برای هر i، $1 \leq i \leq k$، مجموعه V_i یک مجموعه مستقل در G است.

واضح است که همواره عدد رنگی بزرگ‌تر یا مساوی عدد خوشه‌ای خواهد بود و با الگوریتم حریصانه[1] می‌توان یک کران بالا برای χ پیدا کرد.

قضیه ۲.۱. (بروکس،[۱۸]) فرض‌کنیم گراف G هم‌بند و گراف کامل و دور فرد نباشد. دراین‌صورت $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

فرض‌کنیم $G = (V, E)$. منظور از $k-$رنگ‌آمیزی معتبر یالی از گراف G نگاشتی مانند $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ است، به‌طوری‌که برای هر دو یال مجاور e_1 و e_2، $c(e_1) \neq c(e_2)$. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را که گراف G یک $k-$رنگ‌آمیزی یالی معتبر داشته باشد، **عدد رنگی یالی** G می‌نامیم و با نماد $\chi'(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. فرض‌کنیم برای هر رأس $v \in V(G)$، $L(v)$ لیستی از رنگ‌هایی باشد که می‌توان به رأس v نسبت داد. یک **لیست رنگی** f، یک رنگ‌آمیزی معتبر است به‌طوری‌که برای هر رأس v، $f(v) \in L(v)$. گراف G را $k-$**رنگ‌پذیر لیستی** می‌نامیم، هرگاه هر لیست k عضوی که به رئوس آن نسبت دهیم، یک لیست رنگی باشد. منظور از **عدد رنگی لیستی**، $\chi_l(G)$، کوچک‌ترین عدد kای است، به‌طوری‌که G، $k-$ رنگ‌پذیر لیستی باشد.

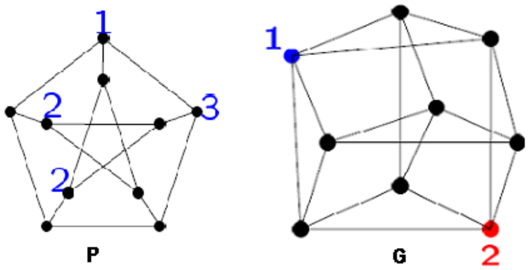
تعریف ۴.۱. فرض‌کنیم گراف $G = (V, E)$، $S \subseteq V(G)$ و c یک $k-$رنگ‌آمیزی از رأس‌های G باشد. اگر c را بتوان به‌طور منحصربه‌فرد از $c|_S$ به یک $k-$رنگ‌آمیزی G گسترش دهیم، دراین‌صورت S را یک **مجموعه تعیین‌کننده** برای G می‌نامیم. اندازه کوچک‌ترین مجموعه تعیین‌کننده را **عدد تعیین‌کننده‌ی** G می‌نامیم و با نماد $d(G, k)$ نشان می‌دهیم.

مفهوم مجموعه تعیین‌کننده در طرح‌های بلوکی و مربع‌های لاتین تعریف و مورد بررسی قرار گرفته است، [۱۶] و [۱۲]. مفهوم مجموعه تعیین‌کننده در رنگ‌آمیزی گراف‌ها برای اولین بار توسط دکتر محمودیان [۱۴] در سال ۱۹۹۵ تعریف شده است. طبق تعریف رنگ‌آمیزی، مجموعه تعیین‌کننده برای $k < \chi(G)$ تعریف نشده است و برای $k > \Delta(G) + 1$، $d(G, k) = |V(G)|$. بنابراین مقدار $d(G, k)$ به ازای $\chi(G) \leq k \leq \Delta(G) + 1$ غیر بدیهی است.

مثال ۵.۱. فرض‌کنیم P گراف پیترسن و G گراف شکل ۱.۱ باشند. دراین‌صورت $d(P, 3) = 4$ و $d(G, 3) = 2$.

مجموعه تعیین‌کننده رنگ‌آمیزی ارتباط نزدیکی با رنگ‌آمیزی لیستی گراف دارد. هر مجموعه تعیین‌کننده S، یک لیست رنگی بر روی رئوس گراف $< G - S >$ القاء می‌کند که با استفاده از این لیست رنگی، $< G - S >$ به‌طور

[1] Greedy coloring



شکل ۱.۱: مجموعه تعیین‌کننده

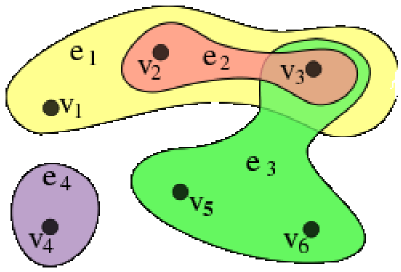
منحصربه‌فرد رنگ‌آمیزی می‌شود.

برای اطلاعات بیش‌تر در زمینه مجموعه تعیین‌کننده در ترکیبیات می‌توانید به مرجع [۱۱] و برای اطلاعات بیش‌تر در زمینه مجموعه تعیین‌کننده در رنگ‌آمیزی می‌توانید به مراجع [۱۵] و [۱۱] مراجعه کنید.

تعریف ۶.۱. گراف ساده G که تهی و کامل نباشد را **گراف قویاً منتظم** (SRG) با پارامترهای (v,k,λ,μ) گوییم، هرگاه: G دارای v رأس و k-منتظم باشد. هر دو رأس مجاور G، λ تا همسایه‌ی مشترک و هر دو رأس غیرمجاور G، μ تا همسایه‌ی مشترک داشته باشند.

گزاره ۷.۱. ([۱۷]، صفحه۲۶۱) اگر G یک گراف قویاً منتظم با پارامترهای (v,k,λ,μ) باشد، آن‌گاه $\overline{G}$ یک گراف قویاً منتظم با پارامترهای $(v, v-k-۱, v-۲k+\mu-۲, v-۲k+\lambda)$ است.

تعریف ۸.۱. فرض‌کنیم X یک مجموعه متناهی و $\mathcal{E}$ یک خانواده متناهی از زیرمجموعه‌های غیرتهی X است، به‌طوری‌که اجتماع آن‌ها برابر X است و $\mathcal{E}$ عضو تکراری ندارد. دراین‌صورت $H=(X,\mathcal{E})$ را یک **ابرگراف** می‌نامیم که X مجموعه رئوس آن و $\mathcal{E}$ مجموعه یال‌ها است (شکل ۲.۱).



شکل ۲.۱: ابرگراف

واضح است که اگر همه زیرمجموعه‌های X دو عضوی باشند، دراین‌صورت ابرگراف، همان گراف است.
ابرگراف H را r-**یکنواخت** گوئیم، هرگاه تعداد رئوس هر یال آن برابر r باشد.

ابرگراف H را **خطی** گوئیم، هرگاه به ازای هر دو یال متمایز e_1 و e_2 از $\mathcal{E}$، داشته باشیم: $|e_1 \cap e_2| \leq 1$.
برای اطلاعات بیش‌تر در زمینه ابرگراف‌ها می‌توانید به مرجع [۹]، رجوع کنید.

۱-۲ تعریف‌ها و نمادگذاری‌ها در مبحث طرح بلوکی

برای مفهوم‌ها و نمادهای تعریف نشده در این‌جا می‌توانید به مراجع [۱۷] و [۶] مراجعه کنید.

نظریه طرح‌های بلوکی یکی از حوزه‌های مهم و کاربردی در ریاضیات ترکیبیاتی است که سابقه این موضوع به اوایل قرن ۱۹ برمی‌گردد. احتمالاً اولین بار ایده طرح‌های بلوکی توسط کرکمن[۲] معرفی گردیده است. نظریه طرح‌های بلوکی در رشته‌های مختلف علوم به‌ویژه در مسأله آزمایش‌های آماری و بهینه‌سازی‌های آماری نقش مهمی را ایفا می‌کند.

یک $t-(v,k,\lambda)$ **طرح بلوکی**، $0 < t < k \leq v, \ \lambda \geq 1$، زوج مرتب (X,β) است به‌طوری‌که X یک مجموعه v عضوی از نقاط است و β یک خانواده از زیرمجموعه‌های k عضوی X (به‌نام بلوک‌ها) است، به‌طوری‌که هر زیرمجموعه t عضوی X مشمول در دقیقاً λ بلوک است.

تعداد بلوک‌ها در یک $t-$طرح را با نماد b نمایش می‌دهیم و

$$b = \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \tag{۱-۱}$$

تعداد بلوک‌هایی که یک زیرمجموعه i عضوی از X را شامل می‌شوند، با نماد b_i نمایش می‌دهیم و

$$b_i = \frac{\lambda\binom{v-i}{t-i}}{\binom{k-i}{t-i}} \qquad 0 \leq i \leq t \tag{۱-۲}$$

واضح است که $b_0 = b$.

فرض کنیم X یک مجموعه v عضوی باشد. اگر تمام زیرمجموعه‌های k عضوی X را که تعداد آن‌ها $|\beta| = \binom{v}{k}$ است، به عنوان بلوک در نظر بگیریم. دراین‌صورت هر $t-$تایی $\binom{v-t}{k-t}$ بار در بلوک‌ها ظاهر شده است. بنابراین یک طرح بلوکی با پارامترهای $t-(v,k,\binom{v-t}{k-t})$ داریم که آن‌را **طرح بلوکی بدیهی** می‌نامیم.

در مطالعه $t-$طرح‌ها حالت $t = 2$ از قدمت بیش‌تری برخوردار بوده و به‌ویژه در طراحی آزمایشات آماری بیش‌تر مورد توجه واقع می‌شوند.

یک ۲-طرح، **طرح بلوکی ناکامل متعادل** نامیده می‌شود و مخففاً با BIBD نمایش داده می‌شود.

در یک BIBD، $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}\lambda$ و $b_1 = r = \frac{v-1}{k-1}\lambda$، که r تعداد ظاهر شدن هر عضو در بلوک‌ها می‌باشد.

[۲] Kirkman

یک (v,k,λ)-۲، با $b=v$ (یا معادلاً $r=k$) را یک **طرح متقارن** می‌نامیم.

هر t-طرح با مقدار $\lambda=۱$ را یک **سیستم اشتاینر** می‌نامیم و با نماد $S(t,k,\lambda)$ نمایش می‌دهیم.
حالت خاص $t=۲$ و $k=۳$، $S(۲,۳,v)$، به **سیستم سه‌گانه اشتاینر** معروف است و آن‌را با نماد $\mathrm{STS}(v)$ نمایش می‌دهیم. کرک‌من در سال ۱۸۴۷ [۱۳]، نشان داد که شرط لازم و کافی برای وجود یک $\mathrm{STS}(v)$ آن است که $v\equiv ۱,۳$ (پیمانه ۶).

زیرمجموعه‌ای از بلوک‌های $\mathrm{STS}(v)$ که مجموعه نقاط v را افراز می‌کند، یک کلاس موازی می‌نامیم. $\mathrm{STS}(v)$ حل‌پذیر است، هرگاه بتوان بلوک‌های آن را به کلاس‌های موازی افراز کرد. یک $\mathrm{STS}(v)$ حل‌پذیر را یک **سیستم سه‌گانه کرک‌من** از مرتبه v می‌نامیم و با نماد $\mathrm{KTS}(v)$ نمایش میدهیم.
حالت خاص $t=۳$ و $k=۴$، $S(۳,۴,v)$، به **سیستم چهارگانه اشتاینر** معروف است و آن‌را با نماد $\mathrm{SQS}(v)$ نمایش می‌دهیم. شرط لازم و کافی برای وجود یک $\mathrm{SQS}(v)$ آن است که $v\equiv ۲,۴$ (پیمانه ۶) ([۱۳]).

یک طرح $S(۲,k,v)$ متقارن، **صفحه تصویری** نامیده می‌شود و $n:=k-۱$ را مرتبه صفحه تصویری می‌نامیم و آن‌را با نماد $PG(۲,n)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر صفحه تصویری یک طرح متقارن با پارامترهای ۲-$(n^۲+n+۱,n+۱,۱)$ است.
یک $(n^۲,n,۱)$-۲ طرح را **صفحه آفین** می‌نامیم و با نماد $AG(۲,n)$ نمایش می‌دهیم. صفحه آفین را می‌توان به‌صورت یک سیستم وقوع متناهی به‌صورت زیر تعریف کرد:
(۱) هر دو نقطه متمایز روی دقیقاً یک خط قرار داشته باشند. (۲) از هر نقطه خارج از یک خط مانند L، دقیقاً یک خط به موازات L بگذرد. (۳) سه نقطه وجود دارند که روی یک خط نیستند.
بنابراین بلوک‌های صفحه آفین به‌صورت $(n+۱)$ کلاس موازی هستند که در هر کلاس n تا بلوک داریم.

منظور از یک **شبه‌گروه** از مرتبه n، زوج $(Q,\circ)$ است که Q یک مجموعه n عضوی و $\circ$ یک عمل دوتایی است به‌طوری‌که به ازای هر $a,b\in Q$، معادله‌های $a\circ x=b$ و $y\circ a=b$ هر کدام دارای یک جواب منحصربه‌فرد در Q باشد. یک شبه‌گروه را **خودتوان** گوئیم، هرگاه $a\circ a=a$. از آن‌جائی‌که جدول کیلی هر شبه‌گروه، یک مربع لاتین است و هر مربع لاتین را می‌توان جدول کیلی یک شبه‌گروه در نظر گرفت، بنابراین تعریف خودتوان را می‌توان برحسب مربع لاتین تعریف کرد. مربع لاتین L را خودتوان نامیم، هرگاه به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $L(i,i)=i$. مربع لاتین L از مرتبه $۲n$ را **نیم خودتوان** نامیم، هرگاه به ازای هر $۱\leq i\leq n$، $L(n+i,n+i)=i$ و $L(i,i)=i$. مربع لاتین L را **جابه‌جایی** نامیم، هرگاه به ازای هر $۱\leq i,j\leq n$، $L(i,j)=L(j,i)$.

مراجع

[۱] انجمن رياضي ايران، واژه‌نامه‌ي رياضي و آمار، مركز نشر دانشگاهی ۱۳۷۰.

[۲] نازلی بشارتی، شبنم شریعتی و گلناز قاسمی، بررسی نقره‌ای بودن گراف پیترسن تعمیم‌یافته، گزارش، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۷.

[۳] مهدي بهزاد، سيد عباداله محموديان، واژه‌نامه‌ي تركيبيات و نظريه‌ي گراف، گزارش، دانشكده‌ي علوم رياضي، دانشگاه صنعتي شريف، ۱۳۷۳.

[۴] صمد علامتی، درباره‌ي گراف‌هاي پيترسن تعميم‌يافته، پايان‌نامه‌ي كارشناسی ارشد، دانشكده‌ی علوم رياضی، دانشگاه صنعتی شريف، استاد راهنما: سيد عباداله محموديان، ۱۳۸۷.

[۵] نگین کریسانی، مطالعه الگوریتم‌های رنگ‌آمیزی درگراف‌ها با تمرکز برگراف مربع لاتین، پایان‌نامه‌ي کارشناسی، دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف، استاد راهنما: سید عباداله محمودیان، ۱۳۸۹.

[۶] سيد عباداله محموديان، مباحثی در آناليز تركيبی، درس‌نامه، دانشكده‌ي علوم رياضي، دانشگاه صنعتي شريف، ۱۳۸۷.

[۷] مسعود مرتضایی‌فر، رنگ‌آمیزی طرح‌های بلوکی و مربع‌های لاتین، پایان‌نامه‌ي کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، استاد راهنما: سید عباداله محمودیان، ۱۳۸۸.

[۸] فاطمه سادات موسوی، بررسی رنگ‌آمیزی رنگین‌کمانی گراف‌ها، پایان‌نامه‌ي دکتری، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، استاد راهنما: سید عباداله محمودیان، ۱۳۸۸.

1

[9] Claude Berge. *Graphs and hypergraphs.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revised edition, 1976. Translated from the French by Edward Minieka, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6.

[10] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. 1

[11] Diane Donovan, E. S. Mahmoodian, Colin Ramsay, and Anne Penfold Street. Defining sets in combinatorics: a survey. In *Surveys in combinatorics, 2003 (Bangor)*, volume 307 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 115–174. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[12] A. D. Keedwell. Critical sets in latin squares and related matters: an update. *Util. Math.*, 65:97–131, 2004.

[13] C. C. Lindner and C. A. Rodger. *Design theory.* CRC Press LLC, 1997. 4

[14] E. S. Mahmoodian. Some problems in graph colorings. In *Proceedings of the 26th Annual Iranian Mathematics Conference, Vol. 2 (Kerman, 1995)*, pages 215–218. Shahid Bahonar Univ. Kerman, Kerman, 1995.

[15] E. S. Mahmoodian, Reza Naserasr, and Manouchehr Zaker. Defining sets in vertex colorings of graphs and Latin rectangles. *Discrete Math.*, 167/168:451–460, 1997. 15th British Combinatorial Conference (Stirling, 1995).

[16] Anne Penfold Street. Defining sets for block designs: an update. In *Combinatorics Advances (Tehran, 1994)*, pages 307–320. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995. 4

[17] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001. 1

[18] Douglas B. West. *Introduction to graph theory.* Prentice-Hall, Inc, United States of American, 2001. 3

۲

مراجع

۵

۲

۳

۲

۳، ۴

۱، ۲

نمایه