

# فهرست مطالب

۴	فصل ۱ مقدمات و پیش نیازها
۴	مقدمات و پیش نیازها

## پیشگفتار

یکی از مسائلی که در چند دهه اخیر مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفته است، وارد کردن نظریه احتمال به نظریه گروه ها می باشد. آنها سعی کرده اند با تعریف یک احتمال مناسب در یک موضوع خاص، نتایجی را به دست بیاورند که در اثبات قضایای مختلف موضوع مربوطه به کمک آنها بیاید. با آنکه قبل از دهه شصت قرن بیستم در مواردی برخی ریاضی دانان احتمال را در نظریه گروه ها به کار گرفته بودند اما از سال ۱۹۶۵ به بعد اردوش همراه با رنی [۷]، تران [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱] و هال [۵]، [۶]، به طور جدی بحث نظریه احتمالی گروه ها را پیگیری کردند و توانستند مسایل آماری و احتمالی مختلفی را در ارتباط با نظریه گروه ها مطرح کنند. به عنوان مثال احتمال مربعی بودن یک گروه متناهی که حالت ایده آل آن وقتی است که توان ۲ تمام عناصر دقیقاً برابر با خود گروه باشد.

یکی از احتمالاتی که برای گروه ها توسط میلر [۲۹]، در سال ۱۹۴۴ معرفی شد، احتمال جابجایی دو عنصر در یک گروه متناهی بود. او برای یک گروه متناهی مانند  $G$ ، تعداد جفت های مرتبی را در  $G \times G$  را در نظر گرفت که با هم جابه جا می شوند، سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه گروه  $G$  تقسیم کرد و عدد حاصل را درجه جابجایی گروه  $G$  نامید. در سال ۱۹۷۳ گاستافسون [۱۷]، با ارایه یک فرمول توانست ارتباطی بین احتمال معرفی شده و تعداد کلاس های تزویج گروه برقرار کند. او نشان داد که درجه جابجایی یک گروه برابر با حاصل تقسیم تعداد کلاس های تزویج آن گروه بر مرتبه گروه است. بنابراین هر اطلاعاتی که درباره تعداد کلاس های تزویج به دست آمده باشد می تواند در اینجا نیز به کار گرفته شود. به عنوان مثال، اردوش و تران در [۱۱] و نیومن در [۳۰]، به طور مستقل نشان دادند که تعداد کلاس های تزویج  $G$ ، حداقل  $\log_2 \log_2 |G|$  می باشد. حال با تقسیم این عدد بر مرتبه گروه، یک کران پایین برای درجه جابجایی گروه  $G$  حاصل می شود. بنابراین نتایجی که درباره کلاس های تزویج در [۲]، [۱۵]، [۱۶] و ... به دست آمده اند، قابل استفاده در درجه جابجایی می باشند.

یکی از قدیمی ترین نتایجی که برای درجه جابجایی گروه ها به دست آمده است، کران بالای

$\frac{5}{8}$  برای درجه جابجایی گروه های غیر آبلی می باشد، که توسط گاستافسون [۱۷]، ارایه گردید و با توجه به اینکه یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸، این کران را می گیرد بنابراین به نظر می رسد که این کران بالا یک کران دقیق است.

یکی از افرادی که بیشترین کار را روی درجه جابجایی انجام داده است، پائول لسکات می باشد [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۶]، [۲۷]. او با استفاده از مفهوم ایزوکلینسم گروه ها و ارتباط آن با درجه جابجایی توانست گروه هایی که درجه جابجایی آنها حداقل  $\frac{1}{4}$  بود را رده بندی کند. او نشان داد گروه هایی با احتمال بزرگتر از  $\frac{1}{4}$ ، گروه های پوچ توان از کلاس حداکثر ۲ هستند.

در سال ۲۰۰۹ ماریوس [۳۵]، مفهوم درجه جابجایی زیرگروه گروه متناهی معرفی کردند. در این تعریف احتمال جابجا شدن زیرگروه های یک گروه مورد بررسی قرار گرفت. او برای یک گروه متناهی مانند  $G$ ، تعداد جفت های مرتبی را در  $L(G) \times L(G)$  در نظر گرفت که با هم جابجا می شوند. سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه  $L(G)$  تقسیم کرد و عدد حاصل را درجه جابجایی زیر گروه گروه  $G$  نامید.

در سال ۲۰۰۷ عرفانیان، لسکات و رضائی [۱۴]، مفهوم درجه جابجایی نسبی را برای یک گروه متناهی و یک زیر گروه از آن معرفی کردند. در این تعریف درجه جابجایی یک گروه نسبت به یک زیر گروه از آن به دست می آید و با توجه به خواصی که زیرگروه می تواند داشته باشد این درجه با استفاده از آن خواص قابل محاسبه می باشند. ارایه کران بالا و تعمیم قضایای درجه جابجایی با استفاده از تعریف جدید، نتایجی بود که توسط آنها صورت گرفت.

حالت کلی تر درجه جابجایی زیرگروه، درجه جابجایی زیرگروه نسبی گروه متناهی است که در سال ۲۰۱۰ توسط ماریوس [۳۵]، معرفی شد. آنها برای محاسبه درجه جابجایی زیر گروه نسبی یک گروه متناهی مانند  $G$  و یک زیر گروه از آن مانند  $H$ ، تعداد جفت های مرتبی را در  $L(H) \times L(G)$ ، در نظر گرفتند که با هم جا به جا می شوند. سپس تعداد حاصل شده را بر مرتبه  $L(H) \times L(G)$  تقسیم کردند و عدد حاصل را درجه جابجایی زیر گروه نسبی گروه  $G$  نامیدند.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد. در فصل اول مفاهیم مقدماتی و پیشنیازهای مورد استفاده در فصل های بعد را بیان خواهیم کرد. فصل دوم اختصاص به معرفی درجه جابجایی گروه های متناهی و تعمیم آن دارد که در دو بخش جداگانه ی درجه جابجایی و درجه جابجایی نسبی عنوان خواهیم کرد. در این فصل برخی نتایج به دست آمده درباره درجه جابجایی و درجه جابجایی نسبی که توسط لسکات [۲۶] و عرفانیان و سایر مولفین [۱۴]، اثبات شده اند را ارایه خواهیم کرد. در فصل سوم به معرفی درجه جابجایی زیرگروه گروه های متناهی و تعمیم آن دارد که در دو بخش

جداگانه ی درجه جابجایی زیرگروه و درجه جابجایی زیر گروه نسبی که توسط ماریوس [۳۵]، اثبات شده اند را ارایه خواهیم کرد.

# فصل ۱

## مقدمات و پیش نیازها

در این فصل قصد داریم تعاریف و نتایج مقدماتی که مورد نیاز در فصل های بعدی