فوزس تمظبلد

فصل ۲

[illegible] p—گروه‌های [illegible]

۲.۲ زیرگروه‌های فراتینی

تعریف ۲.۲.۲. یک زیرگروه سره M از G یک زیرگروه ماکسیمال از G نامیده می‌شود، اگر زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد به طوری که $M < L < G$.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد. اشتراک همه‌ی زیرگروه‌های ماکسیمال و زیر گروه فراتینی G گویند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهند.

اگر $G = \{e\}$، آن‌گاه $\Phi(G) = \{e\}$.

به سادگی دیده می‌شود که $\Phi(G)$ یک زیرگروه مشخصه از G است.

قضیه ۴.۲.۲. اگر $K \lhd G$ باشد، آن‌گاه K یک زیرگروه ماکسیمال از G است اگر و تنها اگر $\frac{G}{K}$ یک گروه از مرتبه‌ی یک عدد اول باشد.

اثبات. [رجوع کنید به لم ۲.۱۱ از [۱۱]]. □

تعریف ۵.۲.۲. یک گروه آبلی A یک p-گروه آبلی مقدماتی گفته می‌شود اگر عدد اول p وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x^p = 1$.

مثال ۶.۲.۲.

قضیه ۷.۲.۲. **(کوشی)** اگر G یک گروه متناهی باشد به طوری که $p \big| |G|$، آن‌گاه G یک عنصر از مرتبه‌ی p دارد.

اثبات. رجوع کنید به [قضیه‌ی ۱۱.۵ از [۱۱]]. □

فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان، و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هریک از آن‌ها در $\mathbb{F}$اند، با $GL(n, \mathbb{F})$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید که $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد n روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، مجموعه‌ی همه‌ی تبدیلات خطی معکوس‌پذیر V را با $GL(V)$ نشان می‌دهیم. $GL(V)$ با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد.

لم ۸.۲.۲. فرض کنیم G یک p-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد به طوری که $G \simeq V^+$، که در آن V^+ گروه جمعی فضای برداری V است. به علاوه، $Aut(G) \simeq GL(V)$.

اثبات. رجوع کنید به [لم ۳.۲.۵ از [۸]]. □

قضیه ۹.۲.۲. اگر G یک p-گروه متناهی باشد، آنگاه G پوچ‌توان است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۲۲.۴ از [۱۱]. $\square$

قضیه ۲۰.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه پوچ‌توان باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت اگر $N \neq ۱$، آن‌گاه $N \cap Z(G) \neq ۱$.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۵.۲.۱۰ از [۸] $\square$

قضیه ۲۱.۲.۲. اگر گروه پوچ‌توان G زیرگروه ماکسیمالی مانند M داشته باشد، آن‌گاه $M \lhd G$.

رجوع کنید به نتیجه ۷.۱.۱۰ از [۸]. . $\square$

قضیه ۲۲.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۵.۳.۱۰ از [۸] $\square$

قضیه ۲۳.۲.۲. اگر G یک $p-$گروه متناهی باشد، آن‌گاه $\Phi(G) = G'G^p$.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۶.۳.۱۰ از [۸]. $\square$

نتیجه ۲۴.۲.۲. اگر G یک $p-$گروه متناهی باشد، آن‌گاه $\frac{G}{\Phi(G)}$ آبلی مقدماتی است.

اثبات. رجوع کنید به ۷.۳.۱۰ از [۸]. $\square$

قضیه ۲۵.۲.۲. فرض کنیم G یک $p-$گروه باشد. در این صورت $\Phi(G) = ۱$ اگر و تنها اگر G یک $p-$گروه آبلی مقدماتی باشد.

اثبات. با استفاده از قضیه (۱.۱.۱۲) و (۱.۱.۱۳)، به راحتی اثبات می‌شود. □

گروه همه‌ی خودریختی‌های مرکزی که عناصر $\Phi(G)$ را ثابت نگه می‌دارند، را با $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ نشان می‌دهیم. به وضوح $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ یک زیرگروه از $Aut_c(G)$ است.

لم ۲.۲.۲۶. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

۱. $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \cap Inn(G) \simeq \frac{Z_۲(G) \cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)}$

۲. اگر $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ باشد، آن‌گاه

$$C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \simeq \frac{Z_۲(G) \cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)}.$$

اثبات.

۱. فرض کنیم $x \in Z_۲(G) \cap C_G(\Phi(G))$ باشد. در این صورت $xZ(G) \in Z(\frac{G}{Z(G)})$. یعنی برای هر $g \in G$ داریم $x^{-۱}g^{-۱}xg \in Z(G)$. حال اگر θ_x خودریختی القا شده توسط x باشد، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم $g^{-۱}\theta_x(g) = g^{-۱}xgx^{-۱} \in Z(G)$. در نتیجه $\theta_x \in Aut_c(G)$. حال برای هر $g \in \Phi(G)$ داریم $\theta_x(g) = xgx^{-۱} = g$. در نتیجه $\theta_x \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$. پس $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \cap Inn(G)$. حال نگاشت $\varphi : Z_۲(G) \cap C_G(\Phi(G)) \longrightarrow C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \cap Inn(G)$ را به صورت $x \longmapsto \theta_{x^{-۱}}$ تعریف می‌کنیم. به وضوح φ خوش تعریف است. حال ثابت می‌کنیم φ یک

همریختی است. برای هر $x, y \in Z_2(G) \cap C_G(\Phi(G))$ و $g \in G$ داریم

$$\theta_{y^{-1}x^{-1}}(g) = y^{-1}x^{-1}gxy = \theta_{y^{-1}}(x^{-1}gx) = \theta_{y^{-1}}(\theta_{x^{-1}}(g)).$$

پس می‌توان نوشت $\varphi(xy) = \theta_{(xy)^{-1}} = \theta_{y^{-1}x^{-1}} = \theta_{y^{-1}}\theta_{x^{-1}}$؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ به سادگی می‌توان دید که φ پوشا است. اگر $x \in \ker(\varphi)$ باشد آن‌گاه $\varphi(x) = \theta_{x^{-1}} = 1_G$. پس برای هر $g \in G$ داریم $x^{-1}gx = \theta_{x^{-1}}(g) = 1_G(g) = g$. در نتیجه $x \in Z(G)$. بنابراین $\ker(\varphi) \leq Z(G)$. حال اگر $x \in Z(G)$ باشد، آن‌گاه برای هر $g \in G$ داریم $[g, x] = 1$. پس $\theta_{x^{-1}}(g) = x^{-1}gx = g = 1_G(g)$. بنابراین $Z(G) \leq \ker(\varphi)$. پس $\ker(\varphi) = Z(G)$. با استفاده از قضیه اول یکریختی

$$\frac{Z_2(G) \cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)} \simeq C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)).$$

۲. با استفاده از قسمت اول، قسمت دوم به راحتی اثبات می‌شود.

□

نتیجه ۲.۲.۲۷. اگر G یک p−گروه غیر آبلی باشد و $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$. آن‌گاه $\frac{Z_2(G) \cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)} \simeq Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G))$، $rank(G' \cap Z(G)) = rank(Z(G))$ و $Z(G) \leq \Phi(G)$.

اثبات. اگر $Z(G) \nleq \Phi(G)$، آن‌گاه وجود دارد $g \in Z(G)$ و یک زیرگروه ماکسیمالی مثل M به طوری که $g \notin M$. در نتیجه $G = M\langle g \rangle$. بر طبق قضیه کوشی و قضیه (۱.۱.۹)، عنصر z از مرتبه‌ی p در $Z(G) \cap \Phi(G)$ وجود دارد. حال نگاشت $\alpha : G \longrightarrow G$ را به صورت

$mg^k \longmapsto mg^kz^k$ تعریف می‌کنیم که در آن $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$. اگر $g_1, g_2 \in G$ و $g_1 = g_2$ باشد، آن‌گاه $m_1, m_2 \in M$ و $k_1, k_2 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ وجود دارند به طوری که $m_1 g^{k_1} = m_2 g^{k_2}$. پس $m_2^{-1} m_1 = g^{k_2} g^{-k_1}$. بنابراین $g^{k_2-k_1} \in M$ که نتیجه می‌گیریم که $g^{k_2} g^{-k_1} = 1$. که به دست می‌آید $k_1 = k_2$ و $m_1 = m_2$. یعنی $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$. پس α خوش تعریف است. هم‌چنین اگر $g_1, g_2 \in G$ باشد، در این صورت داریم

$$\alpha(g_1 g_2) = \alpha(m_1 g^{k_1} m_2 g^{k_2}) = \alpha(m_1 m_2 g^{k_1+k_2}) = m_1 m_2 g^{k_1+k_2} z^{k_1+k_2} =$$

$$m_1 g^{k_1} z^{k_1} m_2 g^{k_2} z^{k_2} = \alpha(g_1)\alpha(g_2).$$

پس α یک همریختی است. حال اگر برای $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$، آن‌گاه $m_1 g^{k_1} z^{k_1} = m_2 g^{k_2} z^{k_2}$. پس $g^{k_1} z^{k_1} = m_1^{-1} m_2 g^{k_2} z^{k_2} = g^{k_2} m_1^{-1} m_2 z^{k_2}$. در نتیجه $g^{k_1-k_2} = m_1^{-1} m_2 z^{k_2-k_1}$. بنابراین $k_1 = k_2$ و $m_1 = m_2$. یعنی $g_1 = g_2$. پس α یک به یک است و از متناهی بودن G نتیجه می‌شود $\alpha \in Aut(G)$. حال برای هر $g \in G$ داریم $g^{-1}\alpha(g) = g^{-k} m^{-1} m g^k z^k = z^k \in Z(G)$. اگر $x \in \Phi(G)$ باشد، آن‌گاه $\alpha(x) = x$. در نتیجه $\alpha \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$. اما α یک خودریختی داخلی نیست. زیرا اگر وجود داشته باشد $a \in G$ به طوری که $\alpha = \theta_a$، آن‌گاه از $g \in Z(G)$ و $g \notin M$ داریم $g = aga^{-1} = \theta_a(g) = \alpha(g) = gz \neq g$. پس $\alpha \in Inn(G)$ که این تناقض با فرض گزاره است. بنابراین $Z(G) \leq \Phi(G)$. حال برای هر $f \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ نگاشت $\sigma_f : \frac{G}{\Phi(G)} \longrightarrow G' \cap Z(G)$ را به صورت $x\Phi(G) \longmapsto x^{-1}f(x)$ تعریف می‌کنیم. به وضوح برای هر $x \in G$ داریم $\sigma_f(x\Phi(G)) \in Z(G)$. حال چون $f \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$،

پس وجود دارد $a \in G$ به طوری که $f = \theta_a$. پس

$$\sigma_f(x\Phi(G)) = x^{-1}f(x) = x^{-1}\theta_a(x) = x^{-1}axa^{-1} \in G'.$$

به وضوح σ_f خوش تعریف است. حال برای هر $x, y \in G$ داریم

$$\sigma_f(xy\Phi(G)) = (xy)^{-1}f(xy) = y^{-1}x^{-1}f(x)f(y) = x^{-1}f(x)y^{-1}f(y) =$$

$$\sigma_f(x\Phi(G))\sigma_f(y\Phi(G)).$$

پس $\sigma_f \in Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G)$.

حال نگاشت $\alpha : C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \longrightarrow Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G)$ را به صورت $f \longmapsto \sigma_f$ تعریف می‌کنیم. به وضوح α خوش تعریف است. برای هر $f, h \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ و $x \in G$ داریم

$$\sigma_{fh}(x\Phi(G)) = x^{-1}(fh)(x) = x^{-1}f(h(x)) = x^{-1}f(xx^{-1}h(x)) =$$

$$x^{-1}f(x)f(x^{-1}h(x)) = x^{-1}f(x)x^{-1}h(x) = \sigma_f(x\Phi(G))\sigma_h(x\Phi(G)).$$

پس α یک همریختی است.

اگر $f \in \ker(\alpha)$، آن‌گاه $\sigma(f) = \sigma_f = I$. برای هر $x \in G$ داریم

$$۱ = I(x\Phi(G)) = \sigma_f(x\Phi(G)) = x^{-1}f(x).$$

یعنی $f(x) = x$. پس f یک خودریختی همانی است. در نتیجه α یک به یک است. برای هر $h \in Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G))$ نگاشت $f : G \longrightarrow G$ را به صورت $x \longmapsto xh(x\Phi(G))$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x, y \in G$ داریم

$$f(xy) = xyh(xy\Phi(G)) = xyh(x\Phi(G))h(y\Phi(G)) = xh(x\Phi(G))yh(y\Phi(G)) =$$
$$f(x)f(y).$$

پس f یک همریختی است. f نیز یک به یک است. زیرا اگر $x \in \ker(f)$ باشد، آن‌گاه $1 = f(x) = xh(x\Phi(G))$. در نتیجه $x^{-1} = h(x\Phi(G)) \in G' \leq \Phi(G)$. پس $x \in \Phi(G)$ یعنی $x^{-1} = h(x\Phi(G)) = h(\Phi(G)) = 1$. در نتیجه f یک به یک است و چون G متناهی است، پس f یک خودریختی است. حال برای هر $x \in G$ داریم $x^{-1}f(x) = x^{-1}xh(x\Phi(G)) = h(x\Phi(G)) \in Z(G)$ و همچنین برای هر $x \in \Phi(G)$ داریم $f(x) = xh(x\Phi(G)) \in \Phi(G)$. زیرا G پوچتوان است و بنابر قضیه (۱۱.۱.۱)، $G' \leq \Phi(G)$. در نتیجه $f \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$. در این صورت داریم

$$\sigma_f(x\Phi(G)) = x^{-1}f(x) = x^{-1}xh(x\Phi(G)) = h(x\Phi(G)).$$

یعنی $\sigma_f = h$. پس $\alpha(f) = \sigma_f = h$. بنابراین α پوشا می‌شود. در این صورت $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \simeq Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G))$. در نتیجه با استفاده از گزاره‌ی (۱۵.۱.۱)،

$$\frac{Z_2(G) \cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)} \simeq Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, G' \cap Z(G)).$$

□

نتیجه ۲۸.۲.۲. فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد به طوری که G' دوری است. در این صورت $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ اگر و تنها اگر $Z(G)$ دوری باشد و $Z(G) \leq \Phi(G)$.

اثبات.

$\Leftarrow$) چون G یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی ۲ است، پس G غیرآبلی است و $G' \leq Z(G)$.
از گزاره‌ی (۱۶.۱.۱)، داریم $rank(G') = rank(G' \cap Z(G)) = rank(Z(G))$ و $\Phi(G) \leq Z(G)$. چون G' دوری است، پس $rank(Z(G)) = 1$. در نتیجه $Z(G)$ دوری می‌شود.

$\Rightarrow$) چون G یک $p-$گروه پوچ‌توان از رده‌ی ۲ و $Z(G)$ دوری است، پس از قضیه (۶۶)، $C_{Aut_\Phi}(Z(\Phi(G))) = Inn(G)$. چون $Z(G) \leq \Phi(G)$، به سادگی دیده می‌شود $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G)$.

$\square$

نتیجه ۲۹.۲.۲. اگر G یک $p-$گروه متناهی از رده‌ی پوچ‌توانی ۲ باشد به طوری که G' دوری است، آن‌گاه $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ اگر و تنها اگر $Z(G) \leq \Phi(G)$.

اثبات.

$\Rightarrow$) اگر $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از گزاره (۱۶.۱.۱)، داریم $Z(G) \leq \Phi(G)$.

$\Leftarrow$) اگر $Z(G) \leq \Phi(G)$ باشد، آن‌گاه $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq C_{Aut_c(G)}(Z(G))$. با استفاده از قضیه (۶۶)، داریم $C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G)$. در نتیجه به دست می‌آوریم $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$.

□

نگاره ۲.۲.۰۲. فرض کنیم G یک p–گروه متناهی غیرآبلی باشد. در این صورت $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ اگر و تنها اگر $\frac{Z_2(G)\cap C_G(\Phi(G))}{Z(G)} \simeq Hom(\frac{G}{\Phi(G)}, Z(G))$.

اثبات.

$(\Longrightarrow$

$(\Longleftarrow$

□

نگاره ۲.۲.٪۳. اگر G یک p–گروه متناهی باشد، آن‌گاه $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $G \simeq C_2$ یا $\Phi(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.

اثبات.

$(\Longrightarrow$ اگر $G = C_2$ باشد، آن‌گاه به وضوح $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G) = 1$. اگر $Z(G) = \Phi(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد، آن‌گاه از قضیه (۱.۱.۱۱)، $G' \leq Z(G)$. بنابراین G یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی ۲ است. پس از قضیه‌ی (۶۴)، داریم $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G)$.

$(\Longleftarrow$ حال اگر $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G)$ و G یک p–گروه آبلی باشد، آن‌گاه G یک p–گروه آبلی مقدماتی است. یعنی $exp(G) = p$. زیرا اگر $exp(G) = p^k$ و $k > 1$

باشد، آن‌گاه نگاشت $\theta : G \longrightarrow G$ را به صورت $x \longmapsto x^{1+p^{k-1}}$ تعریف می‌کنیم. θ غیربدیهی است. زیرا اگر برای هر $x \in G$ داریم $\theta(x) = x^{1+p^{k-1}} = x$. یعنی برای هر $x \in G$ داریم $x^{k-1} = 1$، که با $exp(G) = p^k$ در تناقض است. به وضوح θ خوش تعریف است. هم‌چنین با توجه به آبلی بودن G، تکریختی نیز است و با توجه به متناهی بودن G، θ یک خودریختی است. حال برای هر $x \in G$ داریم

$$x^{-1}\theta(x) = x^{-1}x^{1+p^{k-1}} = x^{p^{k-1}} \in G = Z(G).$$

چون G آبلی است، پس $G' = 1$. با توجه به قضیه‌ی (۱۲.۱.۱)، $\Phi(G) = G^p$. پس برای هر $x \in \Phi(G)$ وجود دارد $y \in G$ به طوری که $x = y^p$. در نتیجه داریم

$$\theta(x) = \theta(y^p) = y^{p+p^k} = y^p = x.$$

بنابراین θ یک خودریختی مرکزی غیربدیهی است که عناصر فراتینی را ثابت نگه می‌دارد. با توجه به فرض، θ یک خودریختی القایی است. اما چون G یک گروه آبلی است، پس $Inn(G) = 1$ است که این با غیربدیهی بودن θ در تناقض است. در نتیجه $k = 1$.

چون G آبلی است، پس هر $\alpha \in Aut(G)$ یک خودریختی مرکزی است. یعنی $Aut_c(G) = Aut(G)$. از طرفی چون G یک $p-$گروه آبلی مقدماتی است، پس از قضیه (۱۴.۱.۱)، $\Phi(G) = 1$. در نتیجه هر عضو $Aut(G)$ یک عضو از $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ است. یعنی $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Aut(G)$. از طرفی چون داریم $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G) = 1$، پس $Aut(G) = 1$.

نگاشت $G \longrightarrow G : f$ که به صورت $g \longmapsto g^{-1}$ تعریف می‌شود یک خودریختی است. زیرا G یک گروه آبلی است. با توجه به این‌که ثابت کردیم، $Aut(G) = 1$ باید $x = x^{-1}$. بنابراین $p = 2$. حال اگر $|G| > 2$ باشد، آن‌گاه یک تبدیل خطی معکوس‌پذیر غیربدیهی وجود دارد که با لم (۷.۱.۱)، در تناقض است. در نتیجه $G \simeq C_2$.

فرض کنیم $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G)$ و G یک p-گروه غیرآبلی باشد. در این صورت داریم $Inn(G) \leq C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$. بنابراین برای هر $g \in G$ و هر $x \in \Phi(G)$ داریم $gxg^{-1} = \theta_g(x) = x$. بنابراین $gx = xg$. در نتیجه $\Phi(G) \leq Z(G)$. همچنین از $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \leq Inn(G)$ و گزاره (۱۶.۱.۱)، داریم $Z(G) \leq \Phi(G)$. در نتیجه $Z(G) = \Phi(G)$. بنابراین $C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) = Inn(G)$. با استفاده از قضیه‌ی (۶۶)، $Z(G)$ دوری می‌شود.

□

قضیه ۳۲.۲.۲. فرض کنیم G یک p-گروه غیرآبلی متناهی باشد که در یکی از شرایط زیر صدق کند

الف) $rank(G' \cap Z(G)) \neq rank(Z(G))$

ب) $\frac{Z_2(G)}{Z(G)}$ دوری است

ج) $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$ و $\frac{Z_2(G) \cap Z(\Phi(G))}{Z(G)}$ یک گروه آبلی مقدماتی از رتبه‌ی rs نباشد که $r = d(G)$ و $s = rank(Z(G))$.

در این صورت G دارای یک خودریختی مرکزی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که عناصر $\Phi(G)$ را ثابت نگه می‌دارد.

اثبات. فرض کنیم $Z(G) \nsubseteq \Phi(G)$. در این صورت از گزاره‌ی (۱۶.۱.۱)، داریم $C_{Aut_c(G)}(\Phi(G)) \nleq Inn(G)$. پس G دارای یک خودریختی مرکزی غیرداخلی مانند α است که عناصر $\Phi(G)$ را ثابت نگه می‌دارد. که این خودریختی از مرتبه‌ی p است. زیرا برای هر $x \in G$ داریم

$$\alpha^p(x)$$

در ابتدا برای هر $f \in C_{Aut_c(G)}(\Phi(G))$ نگاشت $\sigma_f : \frac{G}{\Phi(G)} \longrightarrow Z(G)$ را با ضابطه $x\Phi(G) \longmapsto x^{-1}f(x)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم برای $x_1, x_2 \in G$ داشته باشیم $x_1\Phi(G) = x_2\Phi(G)$. در این صورت $x_1x_2^{-1} \in \Phi(G)$. در نتیجه

$$f(x_1)f(x_2)^{-1} = f(x_1x_2^{-1}) = x_1x_2^{-1}.$$

پس بنابراین $\sigma_f(x_1\Phi(G)) = x_1^{-1}f(x_1) = x_2^{-1}f(x_2) = \sigma_f(x\Phi(G))$. پس σ_f خوش تعریف است. حال برای هر $x_1, x_2 \in G$ داریم $\sigma_f((x_1\Phi(G))(x_2\Phi(G))) = \sigma_f(x_1x_2\Phi(G)) =$

□

قضیه ۳۳.۲.۲. اگر G یک $p-$گروه متناهی باشد، آن‌گاه $C_{Aut_\Phi(G)}(Z(\Phi(G))) \leq Inn(G)$ اگر و تنها اگر G یک گروه آبلی مقدماتی باشد یا $\Phi(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد.

اثبات.

$\Leftarrow$) اگر G یک گروه آبلی مقدماتی باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه (۱.۱.۱۴)، $\Phi(G) = 1$. حال برای هر $\alpha \in Aut_{\Phi}(G)$ و برای هر $x \in G$ داریم، $x^{-1}\alpha(x) \in \Phi(G)$ یعنی $x^{-1}\alpha(x) = 1$. در نتیجه $\alpha(x) = x$. بنابراین $Aut_{\Phi}(G) = 1$. از طرفی چون G آبلی است، پس $Inn(G) = 1$. در نتیجه $C_{Aut_{\Phi}}(Z(\Phi(G))) = Inn(G) = 1$. اگر $\Phi(G) = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری باشد، آن‌گاه $G' \leq Z(G)$. پس G یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی ۲ است. پس از قضیه (۶۶)، $C_{Aut_{\Phi}}(Z(\Phi(G))) = Inn(G) = 1$.

$\Rightarrow$) فرض کنیم $C_{Aut_{\Phi}}(Z(\Phi(G))) \leq Inn(G)$. اگر G یک گروه آبلی باشد، ثابت می‌کنیم $exp(G) = p$. فرض کنیم $exp(G) = p^k$ که در آن $k > 1$ است. حال تابع $\theta : G \longrightarrow G$ را به صورت $x \longmapsto x^{1+p^{k-1}}$ تعریف می‌کنیم. چون $exp(G) = p^k$، پس θ غیربدیهی است. به وضوح θ خوش تعریف است. حال برای هر $x_1, x_2 \in G$ داریم

$$\theta(x_1x_2) = (x_1x_2)^{1+p^{k-1}} = x_1^{1+p^{k-1}}x_2^{1+p^{k-1}}.$$

پس θ همریختی است. حال اگر $\theta(x_1) = \theta(x_2)$ باشد، آن‌گاه $x_1^{1+p^{k-1}} = x_2^{1+p^{k-1}}$. در نتیجه θ یک به یک است. چون G متناهی است، پس θ یک خودریختی غیربدیهی است. حال با استفاده از قضیه (۱.۱.۱۳)، برای هر $g \in G$ داریم $g^p\Phi(G) = (g\Phi(G))^p = \Phi(G)$. در این صورت $g^p \in \Phi(G)$. در نتیجه برای هر $x \in G$ داریم $x^{-1}\theta(x) = x^{-1}x^{1+p^{k-1}} = x^{p^{k-1}} = (x^p)^{p^{k-2}}$. چون G آبلی است، پس $G' = 1$. با استفاده از قضیه (۱.۱.۱۲)، $\Phi(G) = G^p$. بنابراین برای هر $x \in \Phi(G)$

عضو مانند y در G وجود دارد به طوری که $x = y^p$. از طرفی چون $exp(G) = p^k$، پس $\theta(y^p) = y^{p+p^k} = y^p$. در نتیجه $\theta \in C_{Aut_\Phi}(Z(\Phi(G))) \leq Inn(G) = 1$ که تناقض است. پس G یک p–گروه آبلی مقدماتی است.

حال فرض کنیم G یک p–گروه غیرآبلی باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $Z(G) \leq \Phi(G)$. فرض کنیم $Z(G) \not\leq \Phi(G)$. در این صورت وجود دارد زیرگروه ماکسیمال M از G به طوری که $Z(G) \not\leq M$. حال عضو $g \in Z(G)/M$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $G = M\langle g\rangle$. یک عضو مانند z از مرتبه‌ی p در $Z(G) \cap \Phi(G)$ انتخاب می‌کنیم. نگاشت را $\alpha : G \longrightarrow G$ برای هر $m \in M$ و $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ به صورت $mg^k \longmapsto mg^kz^k$ تعریف می‌کنیم. اگر $g_1, g_2 \in G$ و $g_1 = g_2$ باشد، آن‌گاه وجود دارند $m_1, m_2 \in M$ و $k_1, k_2 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ به طوری که $m_1g^{k_1} = m_2g^{k_2}$. پس $m_2^{-1}m_1 = g^{k_2-k_1}$. بنابراین $g^{k_2-k_1} \in M$. در نتیجه $k_1 = k_2$. پس $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$. بنابراین α خوش تعریف است. همچنین برای هر $g_1, g_2 \in G$ داریم

$$\alpha(g_1g_2) = \alpha(m_1g^{k_1}m_2g^{k_2}) = \alpha(m_1m_2g^{k_1+k_2}) = m_1m_2g^{k_1+k_2}z^{k_1+k_2} =$$

$$m_1g^{k_1}z^{k_1}m_2g^{k_2}z^{k_2} = \alpha(g_1)\alpha(g_2).$$

یعنی α یک همریختی است.

حال اگر $g_1, g_2 \in G$ و $\alpha(g_1) = \alpha(g_2)$، آن‌گاه عناصر $k_1, k_2 \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ و $m_1, m_2 \in M$ وجود دارند به طوری که $g_1 = m_1g^{k_1}$ و $g_2 = m_2g^{k_2}$. پس

داریم $m_۲g^{k_۲}z^{k_۲} = \alpha(m_۲g^{k_۲}) = \alpha(m_۱g^{k_۱}) = m_۱g^{k_۱}z^{k_۱}$. آن‌گاه مانند قبل داریم

$g^{k_۱-k_۲} = m_۱^{-۱}m_۲z^{k_۲-k_۱}$. پس $g^{k_۱-k_۲} \in M$.

$\square$

ەزلجئو

[1] J. E. Adney, Yen, T. Automorphisms of a p-group. Illinois J. Math. **9**(1965), 137-143.

[2] M. J. Curran and D. J. McCaughan, Central automorphisms that are almost inner. Comm. Algebra, 29(5), 2081–2087 (2001).

[3] Franciosi, S., Giovanni, F. D., Newell, M. L. (1994). on central automorphims of infinite groups. *Comm Algebra* 22(7):2559-2578.

[4] D. Gorenstein, *Finite Groups*, second ed., Chelsea, New York, 1980.

[5] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[6] B. Huppert, *Character Theory of Finite Groups*,

[7] A. Jamali., Mousavi, H. (2002). On the central automorphisms group of finite p-groups. *Algebra Colloquium* 9(11):7-14

[8] A. R. Jamali. *Topics in the Theory of finite groups* Mobtakeran Press (2002) (in persian). 2, 3

[9] M. Morigi, On the minimal number of generators of finite non-abelian p-groups having an abelian automorphism group, *Comm Algebra* **23(6)**, 1995, 2045-2065.

[10] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[11] J. S. Rose, *A course on group theory*, Cambridge University Press, 1978. 1, 2, 3

[12] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

[13] M. Shabani Attar, 'On central automorphisms that fix the centre elementwise', Arch. Math. (Basel) 89 (2007), 296–297.

[14] Attar, M. Shabani(2009) 'On the Marginal Automorphisms of a Group', Communications in Algebra, 37: 7, 2300 — 2308

[15] W. R. Scott, *Group Theory*. Englewood Cliffs 1964.

[۱۶] علی اکبر محمدی حسن آبادی ، جبر، انتشارات دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۷ .

[۱۷] سیامک یاسمی، محمدرضا پورنکی، مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مدول‌ها، مؤسسه‌ی انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، سال ۱۳۸۴.