فهرست مطالب

فصل ۱

۱.۱ اعداد باس

در سراسر این بخش، فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی، $\underline{a}$ ایده آلی از R و M یک $R-$ مدول (نه لزوما متناهی مولد) باشد. در ادامه، ارتباط ما بین اعداد باس M و $H^i_{\underline{a}}(M)$ ، $i=\circ,\text{۱},\cdots$ ، را بررسی می‌کنیم. برای راحتی قرار دهید $\mu^i(M):=\mu^i(\underline{m},M)$.

لم ۱.۱.۱. *فرض کنید $\underline{a}\subseteq\underline{b}$ ایده آل دیگری از R باشد. در این صورت*

(a) $Hom_R(R/\underline{b},M)=Hom_R(R/\underline{b},\Gamma_{\underline{a}}(M))$.

(b) *اگر* $\Gamma_{\underline{a}}(M)=\circ$ *، آنگاه* $Hom_R(R/\underline{b},M)=\circ$.

برهان ۲.۱.۱. *به منظور اثبات* (a) *ابتدا فرض کنید* $f\in Hom_R(R/\underline{b},\Gamma_{\underline{a}}(M))$ *، یعنی،* $f:R/\underline{b}\longrightarrow\Gamma_{\underline{a}}(M)$ *یک $R-$مدول هومومورفیسم است. حال، چون* $\Gamma_{\underline{a}}(M)$ *یک زیر مدول* M *است، پس* $f:R/\underline{b}\longrightarrow M$ *نیز یک $R-$مدول هومومورفیسم است. در نتیجه* $f\in Hom_R(R/\underline{b},M)$ *. این نشان می دهد که* $Hom_R(R/\underline{b},\Gamma_{\underline{a}}(M))\subseteq Hom_R(R/\underline{b},M)$ *. به منظور اثبات شمول عکس ، فرض کنید* $f\in Hom_R(R/\underline{b},M)$ *. در این صورت ، روشن است که به ازای هر* $r\in R$ *،* $\underline{a}f(r+\underline{b})=\circ$

. این نشان می دهد که، به ازای هر $r \in R$ ، $f(r+\underline{b}) \in \Gamma_{\underline{a}}(M))$. در نتیجه $Imf \subseteq \Gamma_{\underline{a}}(M)$ ، یعنی $f \in Hom_R(R/\underline{b}, \Gamma_{\underline{a}}(M))$. لذا نشان داده ایم که $Hom_R(R/\underline{b}, M) \subseteq Hom_R(R/\underline{b}, \Gamma_{\underline{a}}(M))$. بنابراین $Hom_R(R/\underline{b}, M) = Hom_R(R/\underline{b}, \Gamma_{\underline{a}}(M))$. این (a) را اثبات می کند. اکنون روشن است که (b) نتیجه ساده ای از (a)است.

قضیه ۳.۱.۱. به ازای هر $r \geq ۰$، نامساوی زیر برقرار است:

$$\mu^r(m) \leq \sum_{i=۰}^{r} \mu^{r-i}(H^i_{\underline{a}}(M))$$

.

برهان ۴.۱.۱. با استقراء روی r حکم را اثبات می‌کنیم. ابتدا، فرض کنید $r = ۰$. در این صورت بنا بر لم .... داریم :

$$\mu^{\circ}(M) = dim_{R/m} Hom_R(R/m, m) = dim_{R/\underline{m}} Hom_R(R/\underline{m}, \Gamma_a(M)) = \mu^{\circ}(\Gamma_{\underline{a}}(M)).$$

اکنون فرض کنید که $r > ۰$ و این که حکم برای $r - ۱$ اثبات شده باشد . و قرار دهید $N = E/(M/\Gamma_a(M))$. در نتیجه رشته دقیق کوتاه $۰ \longrightarrow M/\Gamma_{\underline{a}(m)} \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow ۰$ به دست می‌آید. لذا به ازای هر $i \geq ۰$، رشته‌های دقیق طولانی زیر حاصل می‌شود:

$$Ext^{i-۱}_R(R/\underline{m}, E) \longrightarrow Ext^{i-۱}_R(R/\underline{m}, N) \longrightarrow Ext^i_R(R/\underline{m}, M/\Gamma_{\underline{a}}(M)) \longrightarrow Ext^i(R/\underline{m}, E)$$

و

$$H^i_{\underline{a}}(E) \longrightarrow H^i_{\underline{a}}(N) \longrightarrow H^{i+۱}_{\underline{a}}(M/\Gamma_{\underline{a}}(M)) \longrightarrow H^{i+۱}_{\underline{a}}(E).$$