دانشگاه

دانشکده

گروه

پایان‌نامه

عنوان

نگارش

تقدیم به مادرم : نازنین یار بی صدای شبهای پر تلاطم زندگی ام

و پدرم : یگانه الگوی استقامت و صبر

پرودگارا،

و این‌ها همه که گفتم چه کس غیر از توست **خداوندم**

همه حال می‌بباید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی‌رنج و اندیشه حاصل شود، پس هرآینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی‌اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که درو اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که درو راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

نام خانوادگی دانشجو:	نام:	
عنوان:		
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته:	گرایش:
دانشگاه: تاریخ فارغ‌التحصیلی:	 تعداد صفحات: ۳۸	
واژگان کلیدی:		

چکیده

-abstract

پیش‌گفتار

منطق شناختی احتمالاتی پویا منطقی نسبتاً جدید است که قبل از مطالعه‌ی آن می‌بایست منطق شناختی، منطق شناختی پویا و منطق شناختی احتمالاتی معرفی شده باشد و به فراخور در فصول سه‌گانه به معرفی و توصیف هریک خواهیم پرداخت.

مقدمه را با بهره‌جستن از مقدمه‌ی مقاله‌ی [؟] نگاشتم و البته هر کجا که لازم بود از مقدمه‌های دیگر مقالات نیز استفاده کردم.

در فصل ۱ ابتدا با کمک [؟] و [؟] به خلاصه‌ای از منطق شناختی می‌پردازیم، سپس بر مبنای [؟] منطق شناختی احتمالاتی را که همان منطق شناختی سنتی است به اضافه‌ی توانایی استدلال درباره‌ی احتمال معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم.

فصل ۲ بر اساس [؟] نوشته شده است و به معرفی منطق‌های پویا اعم از شناختی پویا و شناختی پویای احتمالاتی اختصاص دارد. در این فصل پس از معرفی منطق اعلان عمومی و سپس گونه‌ای تا حدی تعمیم یافته از منطق شناختی پویا با در نظر گرفتن مدلی ساده از منطق شناختی احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی معرفی شده و تمامیت آن اثبات می‌شود. برای آنکه منطق‌های شناختی پویا را احتمالاتی کنیم ابتدا سه گونه‌ی طبیعی احتمال را تعریف می‌کنیم که عبارتند از: احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها. برای اثبات تمامیت منطق‌های پویا اصول موضوعه‌ای مطرح می‌شود تا بتوان معادل با هر فرمول در این منطق‌ها، با حذف عملگر پویا، فرمولی در منطق‌های ایستا بدست آورد. این اصول اثرات متقابل عملگر پویا با اتم‌ها و عملگرهای بولی و شناختی را توصیف می‌کنند. پس از اثبات صحت، با کمک آنها تمامیت منطق‌های پویا را از تمامیت منطق‌های ایستا نتیجه می‌گیریم.

هنگامی که به همراه ولی‌زاده به مطالعه و اثبات جزئیات مقاله‌ی [؟] مشغول بودیم با مسائل و مشکلاتی برخورد کردیم که به تناسب در بخش‌های مختلف فصل ۲ با عنوان ملاحظه به آنها اشاره خواهم کرد.

فصل ۳ نیز بر گرفته از [؟] است و به منظور ارائه‌ی مثالی برای نشان دادن کاربرد منطق شناختی پویای احتمالاتی نگاشته شده است. مثالی که ارائه می‌شود معمای معروف Monty Hall است که پیش از این مقاله راه‌حلی صوری برای آن داده نشده بود، ولی ما بر اساس این مقاله به راه‌حلی صوری با کمک گونه‌ای از منطق‌های شناختی پویای احتمالاتی دست می‌یابیم که به زیبایی جوابی معقول در اختیار

می‌گذارد. این راه‌حل زیبا را نمی‌توانستم با جزئیات بیان کنم اگر از [؟] استفاده نمی‌کردم و آن را نیافتم مگر با راهنمایی دکتر کویی.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

اقتصادسنجی با مطالعه ی نظام مند پدیده های اقتصادی بااستفاده از داده های مشاهده شده سروکار دارد، به عبارتی اقتصادسنجی، علم تحلیل های آماری از مدلهای اقتصادی است.داده های اقتصادی در سه نوع مختلف می توانند وجود داشته باشند : داده های سری زمانی، داده های مقطعی و داده های تلفیقی .

به طور کلی موضوع کار اقتصادسنجی کلان، داده های سری زمانی است که مقادیر یک متغیر را در نقاط متوالی زمانی اندازه گیری می‌کند. این توالی می‌تواند سالانه، فصلی، ماهانه، هفتگی یا حتی به صورت پیوسته باشد. عموم داده های سری زمانی رفتاری نامانا و غیر قابل پیش بینی، از خود نشان می دهند و از آنجا که واحدهای اقتصادی در تعامل بایکدیگر عمل می کنند، داده های مشاهده شده نشان دهنده یک تعادل اقتصادی پیچیده هستند و نه ناشی از یک رفتار ساده ی ارتباطی ناشی از تقدم و یاتکنولوژی . از این رو اقتصادسنجی مدل‌هایی باچندمجهول را ایجاد می کند.این روش‌ها به محقق اجازه می‌دهند که استنتاجی علّی معلولی، در شرایطی غیر از شرایط آزمایشیِ کنترل شده ارائه دهد. در ادامه تعاریف اولیه و مهم مربوط به سری‌های زمانی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آمده است.

۲.۱ سری زمانی

داده هایی را که در طول زمان جمع‌آوری می‌شوند سری‌زمانی می‌گویند.در سری زمانی برخی مشاهدات به یکدیگر وابسته‌اند.از آنجاکه ویژگی موردبررسی به طور تصادفی درهرزمان به دست می‌آید، می‌توان سری‌زمانی را یک فرآیندتصادفی $\{X_t, t \in T\}$ در نظر گرفت که Tمی تواند هرمقدارحقیقی را اتخاذ کند.هر متغیر تصادفی تنها یک مشاهده داردکه با استفاده از آن مشاهدات می‌توان مدل احتمالی

متناظر سری‌زمانی را بدست آورد. برای سادگی کار به جای مراجعه به توزیع فرآیند، گشتاورهای اول و دوم و تابع اتوکوواریانس، به عنوان مشخصه سری در نظر گرفته می‌شود.

۳.۱ ضریب همبستگی و تابع خودهمبستگی

وجود ارتباط خطی بین دو متغیر را می‌توان با معیاری به نام ضریب همبستگی بررسی کرد.خودهمبستگی نیز حالت خاصی از همبستگی است که بین دو زمان متفاوت از یک متغیر در سری زمانی بدست می‌آید.در ادامه ابتدا مفهوم همبستگی را بیان و بعد تابع خودهمبستگی معرفی می‌شود.

۱.۳.۱ ضریب همبستگی

ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X).var(Y)}} \tag{۱.۱}$$

با این فرض که $var(X)$ و $var(Y)$ موجود و متناهی باشد. این ضریب، وابستگی خطی بین متغیرX و Y را اندازه می‌گیرد. ضریب همبستگی ویژگی‌های زیر را نیز داراست:

$\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$ و $۱ \leq \rho_{X,Y} \leq ۱$.

۲.۳.۱ تابع خودهمبستگی

زمانی که پیدا کردن وابستگی بین مشاهدات زمان t و $t-l$ مورد نظر باشد، مفهوم همبستگی به خودهمبستگی گسترش می‌یابد.

ضریب همبستگی بین X_t و X_{t-l} را خود همبستگی با تأخیر l می‌گویند.این ضریب را با ρ_l نشان می‌دهند که تحت برقراری مانایی ضعیف، تابعی از l است.

$$\rho_l = \frac{cov(X_t, X_{t-l})}{var(X_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} \tag{۲.۱}$$

برای سری‌های ایستای ضعیف$var(t) = var(t-l)$ و بنابر تعریف :

$$\rho_0 = ۱ \text{ و } \rho_l = \rho_{-l} \text{ ، } -۱ \leq \rho_l \leq ۱$$

۴.۱ مانایی

در تحلیل سری زمانی یک تحقق از فرآیند در اختیار است. در صورتی که خواص سری زمانی $\{X_t\}$ در گذر زمان تغییر نکند، انتظار می‌رود که اطلاعات حاصل از این تحقق را بتوان برای برآورد کردن

مشخصه های $\{X_t\}$ وپیش بینی مقادیر آینده آن به کار برد. سری زمانی که خواصش با انتقال زمان تغییر نکند، یک سری زمانی مانا گویند.
ویژگی مورد توجه و کاربردی سری‌های زمانی مانا، میانگین بازگشتی بودن است یعنی اگر در اثر یک شوک ناگهانی، سری از حالت تعادل و نوسان حول میانگین خارج شود، دوباره به حالت قبلی باز می‌گردد. به عنوان مثال فرض کنید X_t سرمایه گذاری بخش خصوصی است. برای ایجاد تحوّل در آن، شوکی وارد میشود که سرمایه‌گذاری را به اندازه ده واحد افزایش دهد. با فرض این‌که سری مذکور مانا باشد، بعد از گذشت چند سال اثری از آن شوک باقی نمی‌ماند و سری به تعادل قبلی باز می‌گردد.

۱.۴.۱ مانایی قوی

سری $\{X_t\}$ را مانای قوی گویند اگر توزیع توأم $(x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_k})$ باتوزیع $(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, ..., x_{t_k+t})$ برای هرمقدار از t یکسان باشد.k یک عدد صحیح مثبت دلخواه و $(t_1, ..., t_k)$ مجموعه ای از k عدد صحیح مثبت است.
به عبارت دیگر مانایی قوی بیان می کند که توزیع توأم $(x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_k})$ نسبت به انتقال زمان، تغییر نمی کند.این شرط بسیار قوی است و در عمل به سختی تأیید می شود.

۲.۴.۱ مانایی ضعیف

سری زمانی $\{X_t\}$ مانای ضعیف است اگر میانگین X_t و کوواریانس X_t و X_{t-l} در طول زمان تغییر نکند .یعنی:

$$E(X_t) = \mu \qquad , \qquad cov(X_t, X_{t-l}) = \gamma_l$$

γ_l خود همبستگی با تأخیرl و μ عددی ثابت است.

۳.۴.۱ اغتشاش خالص

دنباله ای ازمتغیرهای تصادفی ناهمبسته و هم‌توزیع، بامیانگین و واریانس ثابت را فرآیند تصادفی نوفه سفید، اغتشاش خالص یا عامل نوآوری گویند و آن را با نماد مقابل نشان می دهند: $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$

برای چنین فرآیندی داریم: $\gamma(l) = cov(X_t, X_{t+l}) = 0$

$$\rho(l) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

فرآیند اغتشاش خالص مانای ضعیف است و حافظه ندارد $(\rho_l = 0 \forall l > 0)$.اگرX_t توزیع نرمال داشته باشد، فرآیند اغتشاش خالص مانای قوی می‌شود.

۴.۴.۱ روند تصادفی و روند قطعی

سری‌های زمانی نامانا، معمولا تغییرات سیستماتیکی از خود نشان می دهند. روند زمانی این متغیرها در طول زمان به صورت تصادفی تغییر می‌کند،به گونه ای که مسیر حرکت آن‌ها قابل پیش‌بینی نیست، اصطلاحاً می گویند متغیر دارای روند تصادفی[۱] است. به عنوان مثال سری که ریشه واحد دارد، با یک الگوی سیستماتیک غیر قابل پیش بینی تغییر می‌کند و لذا دارای روند تصادفی است.
وجود روند تصادفی در یک سری زمانی به این مفهوم است که در اثروارد شدن شوک به سری جزء روند تصادفی نیز از آن متأثّر می شود و این یعنی شوک وارده به این سری زمانی به صورت دائمی سطح متغیر را تغییر می‌دهد و دیگر سری به تعادل اولیه باز نمی‌گردد.

از طرف دیگر متغیرهایی که دارای روندی کاملا قابل پیش‌بینی باشند، یا به عبارت دیگر مسیر کلی حرکت متغیر در طول زمان قابل پیش‌بینی باشد، روند زمانی قطعی[۲] دارند.

۵.۱ فرآیند خطی عام

برای بررسی یک سری‌زمانی، اولین و ساده‌ترین روش، رسم نمودارسری‌زمانی است.از روی نمودار متوجه می‌شویم که رفتارسری‌ها یکسان نیست، بنابراین برای تبیین رفتار هرسری باید از مدل بخصوصی استفاده کرد. مدل‌های سری‌زمانی خطی نقش مهمی را در تحلیل داده‌ها ایفا کرده‌اند.یک سری‌زمانی راخطی عام می‌نامند اگر بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z_{t-j} \tag{۳.۱}$$

که در آن$\{z_t\} \sim WN(\circ, \sigma^{۲})$ و $\{\psi_j\}$ دنباله‌ی مطلقاً جمع‌پذیر$(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty)$ از اعداد حقیقی باشد. شرط مطلقاً جمع‌پذیر بودن ضرایبψ_j، معادل مانایی سری زمانی $\{X_t\}$ است.

قضیه ۱.۵.۱ (تابع کوواریانس فرآیند خطی عام)**.** فرآیند خطی عام $\{X_t\}$ ، مانا با تابع اتوکوواریانس زیر است:

$$\gamma_X(h) = \sigma^{۲} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \psi_{i+h} \tag{۴.۱}$$

برهان. نخست وجود گشتاورهای اول و دوم ثابت می‌شود. برای هر t :

$$E(X_t^{۲}) = var(X_t) = \sigma^{۲} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_j^{۲} < +\infty$$

[۱] Stochastic trend

[۲] Deterministic trend

است. همگرایی $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\psi_j^2$ از همگرایی $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|$ نتیجه می‌شود. به علاوه $E(X_t)=\sum\psi_j E(Z_{t-j})=0$ و

$$cov(X_t,X_{t+h})=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi_i\psi_j cov(Z_{t-i},Z_{t+h-j})=\sigma^2\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\psi_i\psi_{i+h} \tag{5.1}$$

که تابعی از h است و اثبات کامل می‌شود. □

۱.۵.۱ مدل اتورگرسیو-میانگین متحرک

مدل‌های اتورگرسیو-میانگین متحرک $(ARMA)$ از مشهورترین مدل‌های خطی سری‌زمانی هستند. گویند $X_t\sim ARMA(p,q)$ اگر $\phi_p(B)X_t=\Theta_q(B)Z_t$ و $Z_t\sim WN(0,\sigma^2)$ باشد که در آن عملگرهای

$$\phi_p(B)=1-\phi_1B-\cdots-\phi_pB^p \tag{6.1}$$

و

$$\Theta(B)=1++\cdots+\Theta_qB^q \tag{7.1}$$

به ترتیب عملگرهای اتورگرسیو مرتبه p و میانگین متحرک مرتبه q نامیده می‌شوند و B عملگر پس‌بر[3] است یعنی $B^kX_t=X_{t-k}$

۲.۵.۱ مدل اتورگرسیو

اگر در مدل $ARMA(p,q)$، $q=0$ باشد، مدل به صورت زیر درمی‌آید:

$$X_t-\phi_1X_{t-1}-\cdots-\phi_pX_{t-p}=Z_t \tag{8.1}$$

که می توان به صورت مختصر آن را به شکل $\phi(B)X_t=Z_t$ نمایش داد که $\phi(B)$ همان تعریف ۶.۱ را دارد. $\phi(B)$ را چندجمله‌ای مشخصه‌ی $AR(p)$ نیز می‌گویند. در این حالت سری زمانی $\{X_t\}$ را سری زمانی اتورگرسیو مرتبه p نامیده و با نماد $\{X_t\}\sim AR(p)$ نمایش می‌دهند.
مدل‌های اتورگرسیو، مقادیری از گذشته‌ی سری را به عنوان پیشگوی مقادیر فعلی سری، مورد استفاده قرار می‌دهند. مرتبه‌ی اتورگرسیو به اختلاف زمان بین متغیرهای سری‌زمانی و متغیرهای تأخیری سری‌زمانی که به عنوان پیشگو استفاده می شود، اشاره دارد. برای مثال در مدل $AR(1)$ مقدار سری در دوره قبل، یعنی در زمان $t-1$ می‌تواند در پیشگویی مقدار سری در زمان فعلی به کار آید. این سری را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$X_t=\phi_1X_{t-1}+Z_t$$

[3] lag operator

با استفاده از عملگر پس‌بر داریم: $X_t = \frac{Z_t}{1-\phi B}$ بافرض این‌که فرآیند $\{Z_t\}$ اغتشاش خالص باشد، امید و واریانس $\{X_t\}$ برابر است با:

$$E(X_t) = 0 \;, var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

و تابع اتوکوواریانس و خودهمبستگی

$$cov(y_t, y_{t-k}) = \frac{\phi^k \sigma^2}{1-\phi^2}$$

و

$$corr(y_t, y_{t-k}) = \phi^k$$

است. برای این‌که سری اتورگرسیو مرتبه‌ی اول، در شرایط مانایی صدق کند کافی است $|\phi| < 1$ باشد.
اگر $\phi = 1$ باشد می گویند سری دارای ریشه واحد است و به علت اینکه واریانس نامتناهی می شود دیگر مانا نیست.
به طور کلی شرط مانایی مدل اتورگرسیو مرتبه‌یp این‌است که ریشه‌های $\phi(B) = 0$ باید از لحاظ قدرمطلق بیشتر از یک باشد.

۳.۵.۱ مدل میانگین متحرک

اگر $p = 0$ باشد، سری زمانی، سری میانگین متحرک مرتبه‌ی q نامیده می‌شود و آن را با نماد$\{X_t\} \sim MA(q)$ نمایش می‌دهند. در این صورت مدل$ARMA(0,q)$ به صورت زیر در می آید:

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

یا به طور خلاصه$X_t = \theta(B) Z_t$ که $\theta(B)$ همان تعریف۷.۱ را دارد و به آن چندجمله‌ای مشخصه‌ی مدلMA نیز گفته می‌شود. سری میانگین متحرک، چون ترکیب خطی از نوفه‌ی سفید(اغتشاش خالص) است، دو گشتاور اول آن در طول زمان، بدون تغییر می‌ماند و لذا مانای ضعیف است.
مدل میانگین متحرک مرتبه‌ی qرا می توان به صورت یک مدل اتورگرسیو نامتناهی به شکل

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + z_t \tag{۹.۱}$$

نوشت اگر و فقط اگر ریشه‌های $\theta(L) = 0$، از لحاظ قدرمطلق بیشتر از یک باشد. در این صورت گفته می‌شود الگوی میانگین متحرک، وارون پذیر است.

۶.۱ سری زمانی چندمتغیره

ارتباط اینترنتی و اقتصاد جهانی‌شده، باعث به‌هم‌پیوستن بازارهای مالی جهانی شده‌است. تغییرقیمت در یک بازار به آسانی و باسرعت، بر بازارهای دیگر تأثیر می‌گذارد. بنابراین بازارهای مالی، بیش از پیش به‌یکدیگر وابسته‌شده‌اند. اگر فردی بخواهد از ساختار پویای مالی جهانی، اطلاعات بیشتری کسب‌کند، ناچار باید این بازارها را توأماً مورد بررسی قراردهد. به عنوان مثال، ممکن‌است یک بازار، تحت شرایطی بر بازار دیگر اثرگذار باشد و با تغییر شرایط، این ارتباط معکوس شود به همین علت، دانستن اینکه چطور بازارها با یکدیگر در ارتباطند از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است.در این بخش مدل‌های‌سری‌زمانی چندمتغیره را معرفی می‌کنیم که به رفتار چند سری به‌طور همزمان می‌پردازد.

مشاهداتی که به طور همزمان برای بیش‌از یک سری‌زمانی جمع‌آوری می‌شود را سری‌زمانی چندمتغیره یا سری‌زمانی برداری نامیده‌اند که به هر یک از سری‌های مذکور یک مؤلفه گفته‌می‌شود. k سری زمانی $\{X_{1t}\}, \{X_{2t}\}, ..., \{X_{kt}\}$ را درنظربگیرید. یک سری زمانی چندمتغیره، بردار $(k \times 1)$ سری‌زمانی $\{\mathbf{X}_t\}$ است که در آن i امین سطر از $\{\mathbf{X}_t\}$، $\{X_{it}\}$ است. برای زمان t، $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{kt})'$.

۱.۶.۱ مانایی سری‌های چند متغیره

سری$\{\mathbf{X}_t\}$ مانای ضعیف است اگر گشتاور اول و دوم آن در طول زمان ثابت باشد. به عبارت دیگر سری $\mathbf{X}_t$ ماناست اگر میانگین و ماتریس کوواریانس آن به شکل زیر نمایش داده‌شود:

$$\mu = E(X_t) = (\mu_1, ..., \mu_m)'$$
$$\Gamma(h) = E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)'] = [\gamma_{ij}(h)]_{i,j=1}^{m}$$

که مستقل از زمان است. وقتی $\{\mathbf{X}_t\}$ مانا با تابع کوواریانس $\Omega(.)$ باشد، می‌توان گفت برای هر i، $\{X_{ti}\}$ مانا با تابع کوواریانس $\gamma_{ii}(.)$.

۲.۶.۱ اغتشاش خالص چندمتغیره

به سری m متغیره $\mathbf{Z}_t$ اغتشاش خالص (نوفه‌ی سفید) با میانگین صفر و تابع کوواریانس Σ گویند اگر و فقط اگر $\mathbf{Z}_t$ مانا با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس

$$\Omega(h) = \begin{cases} \Sigma & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases}$$

باشد و آن را به شکل $\{\mathbf{Z}_t\} \sim WN(0, \Sigma)$ نمایش می‌دهند.

۳.۶.۱ فرآیندهای اتورگرسیو-میانگین متحرک چندمتغیره

[فرآیندهای$ARMA(p,q)$ چند متغیره] $\{\mathbf{X}_t, t = \circ, \pm, \cdots\}$ یک فرآیند $ARMA(p,q)$ با m- متغیر است اگر$\{\mathbf{X}_t\}$ پاسخ مانای معادله‌ی زیر باشد:

$$\mathbf{X}_t - \Phi_1\mathbf{X}_{t-1} - \cdots - \Phi_p\mathbf{X}_{t-p} = \mathbf{Z}_t + \Theta_1\mathbf{Z}_{t-1} + \cdots + \Theta_q\mathbf{Z}_{t-q} \qquad (۱۰.۱)$$

به طوری‌که Φ_1، $\cdots$، Φ_p و Θ_1، $\cdots$ وΘ_q ماتریس‌های $m \times m$ حقیقی مقدار هستند و $\mathbf{Z}_t \sim WN(\bullet, \Sigma)$. فرم بسته‌ی ۱۰.۱ به شکل زیر است:

$$\Phi(B)\mathbf{X}_t = \Theta(B)\mathbf{Z}(t), \qquad \{\mathbf{Z}_t\} \sim WN(\bullet, \Sigma) \qquad (۱۱.۱)$$

به‌طوری‌که $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p$ و$\Theta(q) = I + \Theta_1 B + \cdots + \Theta_q B^q$ چندجمله‌ای‌های ماتریسی هستند.I ماتریس همانی $m \times m$ و B عملگر پس‌بر است.

قضیه ۱.۶.۱ (شرط علّی بودن سری‌های چندمتغیره). اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $| z | \leq 1$ ، $det\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) \neq \circ$ باشد، در این‌صورت ۱۱.۱ دقیقاً یک نمایش مانا به شکل

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=\circ}^{\infty} \mathbf{\Psi}_j \mathbf{Z}_{t-j}, \qquad (۱۲.۱)$$

دارد. که در آن ماتریس‌های $\mathbf{\Psi}_j$ به طور یکتا توسط

$$\mathbf{\Psi}(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} \mathbf{\Psi}_j z^j = \Phi^{-1}(z)\Theta(z), \qquad | z | \leq 1, \qquad (۱۳.۱)$$

تعریف شده‌اند.

به بیان ساده‌تر، سری چند متغیره‌ی$\mathbf{X}_t$ یک نمایش میانگین متحرک منحصربه فرد دارد اگر تمام ریشه‌های $det\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) = \circ$ خارج از دایره‌ی واحد قرار گیرد.

قضیه ۲.۶.۱ (شرط وارون‌پذیری سری‌های چندمتغیره). اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $| z | \leq 1$ ،$det\Theta(z) \neq \circ$ باشد، در این‌صورت ۱۱.۱ دقیقاً یک نمایش مانا به شکل

$$\mathbf{Z}_t = \sum_{j=\circ}^{\infty} \Pi_j X^{t-j}, \qquad (۱۴.۱)$$

دارد که ماتریس‌های Π_j به طور یکتا توسط

$$\Pi(z) = \sum_{j=\circ}^{\infty} \Pi_j z^j = \Theta^{-1}(z)\Phi(z), \qquad | z | \leq 1, \qquad (۱۵.۱)$$

تعریف شده‌اند.

به بیان ساده‌تر می توان گفت، سری چندمتغیره‌ی ۱۱.۱ وارون‌پذیر است اگر تمام ریشه‌های $det\Theta(z) = \circ$ خارج از دایره‌ی واحد قرار گیرد.

۷.۱ پیش‌بینی و برآورد پارامترهای مدل

۱.۷.۱ الگوریتم دوربین-لوینسن یک متغیره

رابطه‌ی بازگشتی لوینسن یا دوربین-لوینسن، یک الگوریتم در جبرخطی برای حل بازگشتی معادله‌ای است که شامل ماتریس تاپلیتز است. این الگوریتم ابتدا توسط نورمن لوینسن در سال ۱۹۴۷ بیان‌شد و در سال ۱۹۶۰ توسط جیمز دوربین تأییدشد.همچنین در سال ۱۹۶۳ توسط ویتل به حالت چندمتغیره تعمیم داده‌شد.

قضیه ۱.۷.۱. الگوریتم دوربین-لوینسن یک متغیره اگر$\{X_t\}$ سری زمانی مانا با میانگین صفر و تابع اتوکوواریانس $\gamma(.)$ باشد، ϕ_{n1}،ϕ_{n2}،...، ϕ_{nn} وυ_n به‌ازای$n \geq 2$ ، در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\phi_{nn} = [\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j}\gamma(n-j)]\upsilon_{n-1}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{nn} \\ \phi_{nn} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \phi_{n-1,2} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} - \phi_{n,n} \begin{pmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \phi_{n-1,n-2} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{pmatrix}$$

$$\upsilon_n = \upsilon_{n-1}(1 - \phi_{nn}^2)$$

که $\upsilon_0 = \gamma_0$ و$\phi_{11} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$.

۲.۷.۱ الگوریتم دوربین-لوینسن چند متغیره

$\{\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tm})', t = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$، سری زمانی m متغیره با $E(\mathbf{X}_t) = 0$ و ماتریس کوواریانس $m \times m$ به شکل $\gamma(i,j) = E(\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j')$است. اگر $\mathbf{Y} = (y_1, ..., y_m)'$ بردار تصادفی با گشتاور دوم متناهی باشد، آنگاه

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) = (P_{s_n}y_1, ..., P_{s_n}y_m)' \quad (۱۶.۱)$$

است. p عملگر بهترین پیشگوی خطی است که ویژگی‌هایی شبیه امید ریاضی دارد و روی تمام ترکیب‌های خطی ممکن $s_n = \bar{sp}\{X_{tj}, t =, \cdots, n \quad j = 1, \cdots, m\}$ تعریف شده است. همچنین $\mathbf{Y} - P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$ برهرکدام از$\mathbf{X}_i$ ها که $i = 1, ..., n$ عمود است. بردار $P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$ دو ویژگی دارد:

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) \in s_n \quad \text{و} \quad \mathbf{Y} - P(\mathbf{Y}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) \perp \mathbf{X}_{n+1-i}, \quad i = 1, ..., n$$

دو بردار$\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را متعامد($\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$) گویند اگر $E(\mathbf{X}\mathbf{Y}') = 0_{m \times m}$. حال می‌توان بهترین برآوردگر خطی

را برای $\mathbf{X}_{n+1}$ ، برپایه مشاهدات $\mathbf{X}_1$،$\mathbf{X}_2$، ...، $\mathbf{X}_n$ و با قرار دادن $\mathbf{X}_{n+1}$ به جای $\mathbf{Y}$ در ۱۶.۱بدست آورد:

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} \cdot & n = 0 \\ P(\mathbf{X}_{n+1}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) & n \geq 1 \end{cases}$$

چون $\hat{\mathbf{X}}_{n+1} \in s_n$ ماتریس‌های $m \times m$ ، ϕ_{n1}،ϕ_{n2}،...،ϕ_{nn} موجود است که

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \phi_{n1}\mathbf{X}_n + ... + \phi_{nn}\mathbf{X}_1, \qquad n = 1, 2, ... \tag{۱۵.۱}$$

. همانطور که در بالا اشاره‌شد،

$$\mathbf{X}_{n+1} - \hat{\mathbf{X}}_{n+1} \perp \mathbf{X}_{n+1-i}, \qquad i = 1, ..., n \tag{۱۵.۱}$$

یا به طور معادل

$$E(\hat{\mathbf{X}}_{n+1}\mathbf{X}'_{n+1-i}) = E(\mathbf{X}_{n+1}\mathbf{X}'_{n+1-i}), \qquad i = 1, ..., n \tag{۱۵.۱}$$

است که با جایگذاری $\hat{\mathbf{X}}_{n+1}$ با۲.۷.۱ معادله‌ی پیش‌بینی زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_{nj}\gamma(n+1-j, n+1-i) = \gamma(n+1, n+1-i), \qquad i = 1, ..., n \tag{۱۵.۱}$$

وقتی$\{\mathbf{X}_t\}$ مانا و$\Omega(i,j) = \Gamma(i-j)$ باشد، معادله‌ی پیش‌بینی به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_{nj}\Gamma(i-j) = \Gamma(i), \qquad i = 1, ..., n \tag{۱۵.۱}$$

برای محاسبه‌ی ضرایب ϕ_{nj} می‌توان از الگوریتم چندمتغیره‌ی دوربین-لوینسن استفاده‌کرد. این الگوریتم حاصل حل همزمان دو مجموعه معادله است که یکی مربوط به پیش‌بینی کننده‌ی پیشرو به شکل $P(\mathbf{X}_{n+1}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$و دیگری پسرو با نمایش $P(\mathbf{X}_0|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n)$ است. با فرض این‌که$\tilde{\phi}_{n1}$، $\tilde{\phi}_{n2}$، ...، $\tilde{\phi}_{nn}$ضرایب ماتریسی$m \times m$ باشند که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$P(\mathbf{X}_{n+1}|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) = \tilde{\phi}_{n1}\mathbf{X}_1 + \tilde{\phi}_{n2}\mathbf{X}_2 + \cdots + \tilde{\phi}_{nn}\mathbf{X}_n, \qquad n = 1, 2, ... \tag{۱۵.۱}$$

با استفاده از ۲.۷.۱ می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\phi}_{nj}\Gamma(j-i) = \Gamma(-i), \qquad i = 1, ..., n \tag{۱۵.۱}$$

که ماتریس خطای پیش‌بینی برای هر کدام می‌شود:

$$V_n = E(\mathbf{X}_{n+1} - \hat{\mathbf{X}}_{n+1})(\mathbf{X}_{n+1} - \hat{\mathbf{X}}_{n+1})'$$

$$\tilde{V}_n = E(\mathbf{X}_0 - P(\mathbf{X}_0|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n))(\mathbf{X}_0 - P(\mathbf{X}_0|\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n))'. \tag{۱۵.۱}$$

با استفاده از۲.۷.۱ و برای $n \geq ۱$:

$$V_n = E[(\mathbf{X}_{n+۱} - \hat{\mathbf{X}}_{n+۱})\mathbf{X}'_{n+۱}] = \Gamma(۰) - \phi_{۱۱}\Gamma(-۱) - \cdots - \phi_{nn}\Gamma(-n) \qquad (۱۵.۱)$$

و به‌طور مشابه

$$\tilde{V}_n = \Gamma(۰) - \tilde{\phi}_{۱۱}\Gamma(-۱) - \cdots - \tilde{\phi}_{nn}\Gamma(-n) \qquad (۱۵.۱)$$

قبل از بیان الگوریتم دوربین-لوینسن$D-L$ دو نماد دیگر را نیز معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= E[(\mathbf{X}_{n+۱} - \hat{\mathbf{X}}_{n+۱})\mathbf{X}'_۰] \qquad (۱۶.۱) \\ &= \Gamma(n+۱) - \phi_{n۱}\Gamma(n) - \cdots - \phi_{nn}\Gamma(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_n &= E[(\mathbf{X}_۰ - p(\mathbf{X}_۰|\mathbf{X}_۱, \cdots, \mathbf{X}_n))\mathbf{X}'_{n+۱}] \\ &= \Gamma(-n-۱) - \tilde{\phi}_{n۱}\Gamma(-n) - \cdots - \tilde{\phi}_{nn}\Gamma(-۱) \end{aligned}$$

قضیه ۲.۷.۱ (الگوریتم دوربین-لوینسن چندمتغیره). $\{\mathbf{X}_t\}$ یک سری زمانی مانای m متغیره با $E(\mathbf{X}_t = ۰)$ و تابع اتوکوواریانس $\Gamma(h) = E(\mathbf{X}_{t+h}\mathbf{X}'_h)$ است. اگر ماتریس کوواریانس عنصرnm ام از $\mathbf{X}_۱$،$\mathbf{X}_۲$،$\cdots$،$\mathbf{X}_n$ ناتکین باشد، آنگاه ضرایب $\{\Phi_{nj}\}$ و $\tilde{\Phi}_{nj}$در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} &\phi_{nn} = \Delta_{n-۱}\tilde{\upsilon}^{-۱}_{n-۱}, \\ &\tilde{\phi}_{nn} = \tilde{\Delta}_{n-۱}\upsilon^{-۱}_{n-۱}, \\ &\phi_{nk} = \phi_{n-۱,k} - \phi_{nn}\tilde{\phi}_{n-۱,n-k}, \mathrm{k = 1,..., n-1} \\ &\tilde{\phi}_{nk} = \tilde{\phi}_{n-۱,k} - \tilde{\phi}_{nn}\phi_{n-۱,n-k}, \mathrm{k = 1,..., n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\upsilon_۰ = \tilde{\upsilon}_۰ = \Gamma(۰) \\ &\Delta_۰ = \tilde{\Delta}'_۰ = \Gamma(۱) \end{aligned}$$

برهان.

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+۱} = p(\mathbf{X}_{n+۱}|\mathbf{X}_۲, \cdots, \mathbf{X}_n) + \mathbf{AU} \qquad (۱۰.۱)$$

$U = \mathbf{X}_۱ - p(\mathbf{X}_۱|\mathbf{X}_۲, \cdots, \mathbf{X}_n)$ و A ماتریسی است که در $\mathbf{X}_{n+۱} - AU \perp U$ صدق می‌کند یعنی$E(X_{n+۱}U') = AE(UU')$. با فرض ماناییX می‌توان نوشت:

$$P(X_{n+1}|X_2,\cdots,X_n)=\Phi_{n-1,1}X_n+\cdots+\Phi_{n-1,n-1}X_2, \qquad (۱۱.۱)$$

$$(۱۲.۱)$$

$$\begin{aligned} U &= X_1-\tilde{\Phi}_{n-1,2}-\cdots-\tilde{\Phi}_{n-1,n-1}X_n, \qquad (۱۳.۱)\\ E(UU') &= \tilde{V}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= E(X_{n+1}U')\tilde{V}_{n-1}^{-1} \qquad (۱۳.۱)\\ &= E[(X_{n+1}-p(X_{n+1}|X_2,\cdots,X_n))U']\tilde{V}_{n-1}^{-1}\\ &= E[(X_{n+1}-p(X_{n+1}|X_2,\cdots,X_n))X_1']\tilde{V}_{n-1}^{-1}\\ &= [\Gamma(n)-\mathbf{\Phi}_{n-1,1}]\tilde{V}_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

□

۳.۷.۱ محاسبه‌ی بازگشتی تابع درستنمایی

اگر$\{X_t\}$ فرآیند گاوسی با میانگین صفر و تابع کوواریانس $\gamma(i,j)=E(X_iX_j)$ و $X_n=(X_1,\cdots,X_n)'$ و $\hat{X}_n=(\hat{X}_1,\cdots,\hat{X}_n)'$ و $\hat{X}_1=0$ و Ω_n ماتریس کوواریانس X_t است به طوری‌که $\Omega_n=E(X_nX_n')$ در این‌صورت تابع درستنمایی بیشینه به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$L(\Omega_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(det\Omega_n)^{-\frac{1}{2}}exp(-\frac{1}{2}X_n'\Omega_n^{-1}X_n) \qquad (۱۰.۱)$$

محاسبه‌ی مستقیم Ω_n و Ω_n^{-1} را می‌توانیم با بیان برآوردگرهای یک مرحله‌ای $\hat{X}_j$ و میانگین مجذور خطای $\nu_{j-1},\quad j=1,2,\cdots,n$ که توسط الگوریتم دوربین-لوینسن محاسبه می‌شوند؛جایگزین کنیم. $\phi_{i,j},\quad i=1,2,\cdots\quad j=1,2,\cdots,i$ نشان‌دهنده‌ی ضرایب بدست آمده از الگوریتم دوربین-لوینسن است و $\phi_{i0}=1$ و$\phi_{ij}=0\quad ,j<0,i=0,1,\cdots$ ماتریس $n\times n$ پایین مثلثی C را تعریف می‌کنیم:

$$C=[\phi_{i,i-j}]_{i,j=0}^{n-1} \qquad (۱۰.۱)$$

همچنین ماتریس قطری

$$D=diag(\upsilon_0,\upsilon_1,\cdots,\upsilon_{n-1}) \qquad (۱۰.۱)$$

۸.۱ مدل سری‌زمانی ساختاری

مدل ساختاری سری را به مؤلفه‌هایی تجزیه می‌کند که مستقیماً در تجزیه و تحلیل سری به‌کار می‌روند. سری‌زمانی را در نظربگیرید که می‌تواند به مجموع روند، مؤلفه‌ی فصلی و مؤلفه‌ی اغتشاش،

تقسیم شود. رفتار این سری می‌تواند توسط یک مدل‌رگرسیونی نمایش داده‌شود که متغیر توضیحی این مدل رگرسیونی یک روند قطعی و مجموعه‌ای از متغیرهای فصلی کیفی است. اگر این مولفه‌ها مانا نباشد، این فرمول کردن نامناسب خواهدبود و لازم‌است که ضرایب رگرسیونی در طول زمان تغییرکند. این انعطاف ضرایب در مدل‌های ساختاری ممکن‌است. پس مدل ساختاری چیزی نیست جز یک مدل رگرسیونی که در آن متغیرهای توضیحی تابعی از زمان هستند. به عبارت دیگر، پارامترها با زمان تغییرمی‌کنند(هاوی، ۱۹۸۹).

نمایش مدل ساختاری

مدل ساختاری سری‌زمانی به‌صورت زیر تعریف‌می‌شود:

$$y_t = \mu_t + \psi_t + \gamma_t + \varepsilon_t \qquad (۱۰.۱)$$

که در آنμ_t برای نمایش روند، ψ_t برای دوره، γ_t برای مؤلفه‌ی فصلی و ε_t برای نمایش حرکت تصادفی(اغتشاش) سری به‌کارمی‌رود. همچنین ε_t برای $t = ۱, ۲, ..., T$، همتوزیع و دارای میانگین صفر و واریانسΣ است.

فصل ۲

هم‌جمعی کسری، آزمون و برآوردها

در این فصل ابتدا به معرفی سری‌های باحافظهی بلندمدت یا جمع‌بسته‌ی کسری می‌پردازیم، سپس هم‌جمعی کسری را شرح داده و روش‌های برآورد آن را باهم مقایسه می‌کنیم. در پایان نیز، روشی را به عنوان روش بهینه برمی‌گزینیم.

۱.۲ سری‌های با حافظه‌ی بلندمدت یا جمع‌بسته‌ی کسری

سری‌های‌زمانی با حافظه‌ی بلندمدت یا جمع‌بسته‌ی کسری، سری‌هایی هستند که در آن‌ها، درجه‌ی ماندگاری ارتباط داده‌ها با یکدیگر بالااست. گرنجر و دینگ(۱۹۹۶) سری‌ای را باحافظه‌ی بلندمدت معرفی کردند که ساختار خودهمبستگی آن به آرامی کاهش پیداکند. این یعنی فرآیند قویّاً به مقادیر دور که در گذشته اتفاق افتاده‌است، وابسته‌است.

جمع‌بستگی کسری، نشان از ضعف سری‌های $ARIMA$ در مدل کردن درجه و نوع پایداری سری‌زمانی دارد. پارامتر جمع‌بستگی(d)، در مدل‌های$ARIMA$، تنها می‌تواند ضریبی از یک داشته باشد و یا صفر باشد. اما در مدل‌های باحافظه‌ی بلند مدت یا $ARFIMA$، پارامتر جمع بستگی می‌تواند هر مقداری را بگیرد. مدل با حافظه‌ی بلندمدت یا جمع بسته‌ی کسری($ARFIMA$)، به‌این‌شکل است:

$$\phi(L)(1-L)^d x_i = \theta(L)\varepsilon_t \qquad (۰.۲)$$

که در آن تمام شرایط مدل $ARMA$ صادق است با این تفاوت که پارامتر d می تواند عددی حقیقی باشد. در این مدل به جای اینکه مجبور به برخورد با یک سری، به عنوان سری مانا($I(0)$) یا سری جمع‌بسته($I(1)$)، باشیم، می‌توانیم با دقت بالاتری تغییرات سری را با جمع‌بستگی کسری ($I(d)$)، مدل کنیم که پارامتر d می تواند صفر، یک یا هر نسبتی در این میان باشد.

اگر داده‌ها مانا باشند شوک‌های وارده اثر کوتاه‌مدت برآن‌ها می‌گذارد و در درازمدت داده‌ها باسرعت نمایی به سمت میانگین، بازمی‌گردند. درصورتی‌که داده‌های جمع‌بسته، پس از شوک، تنزل پیدانمی‌کنند

و به سمت میانگین قبلی میل‌نمی‌کنند. مدل‌های$ARIMA$، این شانس را به داده‌ها نمی‌دهند که در درازمدت، با ازبین رفتن اثر شوک، دوباره به سمت میانگین خود بازگردند اما در مدل‌های $ARFIMA$، این امکان، برای داده‌ها فراهم شده‌است. به عبارت دیگر، اگر داده‌های سری‌زمانی پس از وارد آمدن شوک خارجی، در درازمدت دوباره به میانگین اولیه میل کند، فرآیندی با حافظه‌ی بلندمدت یا$ARFIMA$ داریم. تعاریف متعددی برای سری‌های با حافظه‌ی بلند مدت بیان‌شده‌است که در ادامه به دو مورد از آن‌ها اشاره‌می کنیم.

۱.۱.۲ تعریف حافظه‌ی بلندمدت

فرض‌کنیدX_t، یک سری‌زمانی گسسته با ضریب همبستگیρ_j در تأخیر j باشد. گویند فرآیند حاوی حافظه‌ی بلندمدت است اگر:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-n}^{n} \mid \rho_i \mid = \infty \qquad (۰.۲)$$

براک‌ول و دیویس(۱۹۹۵)، تعریف حافظه ی بلندمدت را به‌این شکل بیان‌کردند:

$$\rho_i \sim C \mid i \mid^{۲d-۱} \qquad i \to \infty \quad , \quad C \neq ۰ \quad , \quad ۰ < d < \frac{۱}{۲}$$

برخی محققین بین فرآیندهای با حافظه‌ی متوسط، وقتی $d < ۰$ است و بنابراین $\sum_{-\infty}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$ و فرآیندهای با حافظه‌ی بلندمدت زمانی‌که $۰ < d < ۰/۵$ و $\sum_{-\infty}^{\infty} |\rho(k)| = \infty$ است؛ تفاوت قائل شده‌اند.

یک فرآیند با حافظه‌ی بلندمدت می‌تواند توسط فرآیند $ARMA(p,q)$، باp و q بزرگ، تقریب زده‌شود که در این‌صورت تعداد پارامترها زیاد شده و برآوردشان مشکل می‌شود.

فرآیند$\{x_t, t = ۰, \pm۱, \pm۲, \cdots\}$را $ARIMA(۰,d,۰)$ با $d \in (-۰/۵, ۰/۵)$نامند اگر $\{x_t\}$ پاسخ مانای معادله‌ی تفاضلی$\nabla^d x_t = z_t$ و $\{z_t\} \sim WN(۰,\sigma^۲)$ باشد. به $\{x_t\}$ اغتشاش تفاضلی کسری نیز گفته‌می‌شود.

۲.۱.۲ اغتشاش جمع‌بسته‌ی کسری چندمتغیره

مدل اغتشاش جمع‌بسته‌ی کسری چندمتغیره به شکل اگر $\mathbf{X}_t = (X_{۱,t}, \cdots, X_{r,t})', \quad t = ۱,۲,\cdots,T$پاسخ مانای معادله‌ی تفاضلی زیر باشد

$$diag(\nabla^d)\mathbf{X}_t = \mathbf{Z}_t \qquad (۰.۲)$$

یا به طور معادل

$$\mathbf{X}_t = diag(\nabla^{-d})\mathbf{Z}_t \qquad (۰.۲)$$

گفته می‌شودکه در آن $\mathbf{X}_t$ یک بردار r-بعدی از سری‌های زمانی است و$diag(\nabla^d)$ ماتریسی به فرم زیر است:

$$diag(\nabla^d) = \begin{bmatrix} \nabla^{d_۱} & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & \nabla^{d_۲} & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & \nabla^{d_r} \end{bmatrix}$$

همچنین $\nabla = ۱ - B$ $\mathbf{Z}_t = (Z_{۱,t}, \cdots, Z_{r,t})'$ فرآیندهای اغتشاش خالص مستقل و هم‌توزیع با ماتریس کوواریانس ناتکین Σاست. $\Delta = ۱ - B$ اگر بخواهیم یک سری زمانی گسسته‌ی جمع‌بسته‌ی کسری را در قالب حرکت براونی توصیف کنیم، تبدیل به یک گام‌برداری تصادفی می‌شود:

$$\nabla x_t = (۱ - L)x_t = z_t \qquad (۰.۲)$$

کهL عملگر تأخیر و z_t جملات اخلال با میانگین صفر و واریانس$\sigma^۲$ است. گرنجر و جوییکس(۱۹۸۰) و هاسکینگ(۱۹۸۱)، این عبارت را، با استفاده از بسط دوجمله‌ای برای سری‌های تفاضلی کسری تعمیم‌دادند:

$$\nabla^d = (۱-L)^d = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{d}{k}(-L)^k = ۱ - dL - \frac{۱}{۲}d(d-۱)L^۲ - \frac{۱}{۶}d(d-۱)(d-۲)L^۳ - \cdots \qquad (۰.۲)$$

هرچند عملگرL از تعاریف معمول متغیر تصادفی، در ریاضیات، پیروی نمی‌کند ولی با استفاده از قضیه‌ای که لیندسترم(۱۹۹۵)[۱]، اثبات کرد می‌توانیم بسط بالا را بنویسیم. با جایگزینی ۲.۹.۱ در ۲.۹.۱مدل جمع‌بسته‌ی کسری به شکل زیر نوشته‌می‌شود :

$$(۱ - L)^d x_t = x_t - dLx_t + \frac{۱}{۲}d(d-۱)L^۲x_t - \frac{۱}{۶}d(d-۱)(d-۲)L^۳x_t + \cdots = z_t$$

بنابراین داریم :

$$x_t = dx_{t-۱} - \frac{۱}{۲}d(d-۱)x_{t-۲} + \frac{۱}{۶}d(d-۱)(d-۲)x_{t-۳} - \cdots + z_t$$

با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی تابع گاما که $\Gamma(\alpha+۱) = \alpha\Gamma(\alpha)$ وهمچنین $\Gamma(n) = (n-۱)!$ وقتی n عدد صحیح مثبت باشد، می‌توان ضرایب x_{t-k} که با π_k نشان داده‌شده‌است را به صورت زیر نوشت:

$$\pi_k = \frac{-\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\gamma(k+۱)} \qquad (۰.۲)$$

[۱] برای $\alpha \in R$ و $z \in (-۱;۱)$ داریم: $(۱+z)^\alpha = \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{\alpha}{n}(z)^n$

که $\Gamma(.)$ همان تابع گاما است:

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt & x>0\\ \infty & x=0\\ x^{-1}\Gamma(1+x) & x<0\end{cases} \qquad (۰.۲)$$

در صورتی که سری مورد بررسی وارون‌پذیر باشد ، نمایش میانگین متحرک آن با استفاده از بسط ۲.۹.۱:

$$\begin{aligned} x_t &= (1-B)_{-d}z_t \\ &= (1+dB+\frac{1}{2}d(d+1)B^2+\frac{1}{6}d(d+1)(d+2)B^3+\cdots+z_t \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

است. به‌طور کلی می‌توان ضریب میانگین متحرک را به شکل زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{d(1+d)\cdots(k-1+d)}{k!} \qquad , \qquad k=1,2,3,\cdots \\ &= \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(d)\Gamma(k+1)} \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

۲.۲ شرط مانایی و وارون‌پذیری سری‌های جمع بسته‌ی کسری

قضیه ۱.۲.۲. اگر $\{x_t\}$، فرآیند $ARIMA(0,d,0)$ باشد، داریم:

۱. وقتی $d<\frac{1}{2}$، فرآیند $\{x_t\}$ ماناست و یک نمایش میانگین متحرک نامتناهی دارد.

$$x_t=\psi(B).z_t=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k z_{t-k}, \qquad (۱.۲)$$

ψ_k به شکل زیر تعریف‌می‌شود:

$$\psi_k=\frac{d(1+d)\cdots(k-1+d)}{k!}=\frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} \qquad (۱.۲)$$

اگر $k\to\infty$، $\psi_k\sim k^{d-1}/(d-1)!$.

۲. زمانی‌که $d>-\frac{1}{2}$، فرآیند $\{x_t\}$، وارون‌پذیر است و نمایش نامتناهی اتورگرسیو دارد.

$$\pi(B)x_t=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k x_{t-k}=z_t \qquad (۱.۲)$$

π_kبه شکل زیر تعریف‌می‌شود:

$$\psi_k=\frac{-d(1-d)\cdots(k-1-d)}{k!}=\frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!} \qquad (۱.۲)$$

وقتی $k\to\infty$، $\pi_k\sim k^{-d-1}/(-d-1)!$.

.۳

:

برهان. ۱. داریم $x_t = (1-B)^{-d}z_t$اگر $d < \frac{1}{2}$ باشد، بسط سری توانی $(1-B)^{-d}$ همگراست. همچنین نشان دادیم که بابسط دوجمله‌ای $(1-B)_{-d}$ به ؟؟ می‌رسیم. تقریب $\psi_k \sim k^{d-1}/(d-1)!$ وقتی $k \to \infty$ با استفاده از فرمول شفرد که بیان‌می‌کند برای j بزرگ $\Gamma(j+a)/\Gamma(j+b)$توسط j^{a-b} به خوبی تقریب‌زده‌می‌شود، اثبات‌می‌شود.
برعکس اگر x_t، به شکل ۱۱.۱ باشد، داریم:

$$y_t = A\sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} z_{t-j} + z_t \tag{۱.۲}$$

که واریانس سری ۱ :

$$V(y) = A^2\sigma_z^2\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(d-1)}\right) \tag{۱.۲}$$

است. با استفاده از قضیه‌ی سری‌های نامتناهی، می‌دانیم سری $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$، برای $s > 1$ همگراست و در غیرای‌صورت واگراست. چون واریانس سری x_t و واریانسy_t تنها در یک مقدار ثابت با یکدیگر تفاوت دارند، می‌توان گفت واریانسx_t متناهی‌است اگر$2(d-1) < -1$ و در نتیجه $d < \frac{1}{2}$ و نامتناهی‌است اگر $d \geq \frac{1}{2}$.

۲. با قرار دادن $-d$ به‌جایd اثبات‌می‌شود.

□

قضیه ۲.۲.۲. اگر $\{y_t\}$ مدل $ARIMA(p,d,q)$ باشد، داریم:

۱. $\{y_t\}$ مانا است اگر $d < \frac{1}{2}$ و تمام ریشه‌های $\phi(B) = 0$ خارج از دایره‌ی واحد قرارگیرد.

۲. $\{y_t\}$ وارون‌پذیر است اگر $d > -\frac{1}{2}$ و تمام ریشه‌های $\theta(B) = 0$، خارج از دایره‌ی واحد قرار گیرد.

برهان. ۱. با نوشتن$y_t = \psi(B)z_t$ ، داریم $\psi(z) = (1-z)^{-d}\theta(z)/\phi(z)$. برای $d < \frac{1}{2}$ و$|z| \leq 1$ ، بسط سری توانی$(1-z)^{-d}$؛ همگرا است.

۲. برهان این قسمت نیز شبیه قسمت قبلی می‌باشد، با این تفاوت که شرایط ذکر شده برای همگرایی $\pi(z) = (1-z)^{d}\phi(z)/\theta(z)$، لازم‌است.

□

۱.۲.۲ ماتریس کوواریانس اغتشاش جمع‌بسته‌ی کسری

سری چندمتغیره‌ی اغتشاش جمع‌بسته‌ی کسری ($VARFIMA(0,d,0)$)را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{X}_t = diag(\nabla^{-d})\mathbf{Z}_t \qquad (۱.۲)$$

که مولفه‌ی iام از$\mathbf{Y}_t$

$$Y_{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{ik} Z_{i,t-k}, \qquad \psi_{ik} = \frac{\Gamma(k+d_i)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d_i)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r, \qquad (۱.۲)$$

که ψ_{ik} همان است که در11.1 محاسبه شد. تابع اتوکوواریانس $\mathbf{Y}_t$ در تأخیرh

$$\Omega(h) \quad = \quad E(Y_{t+h}Y_t'), \quad h = -T+1, -T+2, ..., 0, T-2, T-1 \qquad (۲.۲)$$

معادل است با

$$\Omega(h) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{1,k}\psi_{1,k+h} & \dots & \sigma_{1r} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{1,k}\psi_{r,k+h} \\ \sigma_{21} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{2,k}\psi_{1,k+h} & \dots & \sigma_{2r} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{2,k}\psi_{r,k+h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{r1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{r,k}\psi_{1,k+h} & \dots & \sigma_{rr} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_{r,k}\psi_{r,k+h} \end{bmatrix}$$

σ_{mn} معادل است با عنصرnmام از Σ. برای برآورد ماتریس کوواریانس فوق از روش تی‌سی(۲۰۱۰) استفاده می‌کنیم که برای محاسبه‌ی ضرایبψ_{ik} تابع فوق هندسی را به‌کار می‌برد.

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n, \qquad (۲.۲)$$

قرارمی‌دهیم$z = 1$:

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad c \neq 0, -1, -2, \cdots, c-a-b > 0. \qquad (۲.۲)$$

حال می‌توان عنصر(m,n)ام از$\Omega(h)$ را به شکل زیر نوشت:

$$\omega_{m,n}(h) \equiv \sigma_{mn} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{m,k}\psi_{n,k+h} = \frac{\sigma_{mn}\Gamma(1-d_m-d_n)}{\Gamma(d_n)\Gamma(1-d_n)} \frac{\Gamma(h+d_n)}{\Gamma(h+1-d_m)}) \qquad (۲.۲)$$

برای راحت‌تر شدن محاسبات می‌توان تابع$\Omega(.)$ را به صورت حاصل‌ضرب نوشت:

$$\sigma_{mn} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{m,k}\psi_{n,k+h} = \frac{\sigma_{mn}\Gamma(1-d_m-d_n)}{\Gamma(1-d_m)\Gamma(1-d_n)} \prod_{0<j\leqslant h} \frac{j-1+d_n}{j-d_m} \qquad (۲.۲)$$

وقتی$m,n = 1, 2, \cdots, r$ و$h = 1, 2, \cdots$.

۳.۲ روش‌های برآورد $ARFIMA$

تا به‌حال روش‌های بسیاری برای برآورد پارامترهای مدل $ARFIMA$ پیشنهاد شده‌است. سوئل(۱۹۸۹) خلاصه‌ای از روش‌های پیشین برآورد این مدل‌ها ارائه داده و به برخی ویژگی‌ها و معایب آن‌ها نیز اشاره کرده‌است. او این روش‌ها را به دو گروه تقسیم کرد. گروه اول، روش‌های دو مرحله‌ای و گروه دوم، روش‌های یک‌مرحله‌ای.
در روش‌های دومرحله‌ای، در مرحله‌ی اول پارامتر تفاضلی و در مرحله‌ی دوم بقیه‌ی پارامترهای مدل برآورد می‌شود. این گام‌ها تازمانی تکرار می‌شوند که مقدار همگرایی برای پارامترها یافت‌شود. روشهای دومرحله‌ای تنها در گام اول بایکدیگر تفاوت دارند. آنها روندی را برای تبدیل سری، به سری‌ای که از مدل$ARMA(p,q)$پیروی کند، به کارمی‌گیرند. زمانی‌که سری تبدیل‌یافته به‌دست آید، بقیه پارامترهای مدل، توسط روش‌های استاندارد تحلیل سری‌های زمانی برآورد می‌شود.

گام اول، در برآورد پارامتر تفاضلی، حداقل از چهار طریق قابل انجام است:
روش اول: این روش که توسط هایپل و مک‌لود(۱۹۷۸)، بیان شده‌است، پارامتر تفاضلی را با عبارت$d = H - (\frac{1}{2})$ می‌شناساند. این روش، این حقیقت را بیان می‌کند که سری‌های جمع‌بسته‌ی کسری، تقریباً خودهمانند هستند.
روش دوم و سوم: این دو روش، با چگالی طیفی سری‌های جمع‌بسته‌ی کسری کارمی‌کنند. در جاناسک(۱۹۸۲)، پارامتر تفاضلی به‌شکل تابعی از ضرایب فوریه‌ی لگاریتم چگالی طیفی، نوشته‌شده‌است. برآورد پارامتر تفاضلی از طریق ضرایب فوریه‌ی برآوردشده، توسط انتگرال مقداری لگاریتم دوره‌سنج، بدست‌می‌آید. روش دیگر که در جوک و پورتر-هوداک(۱۹۸۳) آمده‌است، رفتار یک چگالی طیفی اطراف صفر را نشان می‌دهد. این روش با استفاده از فرکانس اطراف صفر، رگرسیون یک متغیره‌ی لگاریتم دوره‌سنج بر لگاریتم فرکانس را بدست‌می‌آورد. شیبی که از برآورد این رگرسیون ساده‌ی یک متغیره بدست‌می‌آید، یک برآورد از پارامتر تفاضلی است.
روش چهارم : شی(۱۹۸۷)، برای برآورد پارامتر تفاضلی از روش برآورد بیشترین درستنمایی مدل رگرسیونی جوک و پورتر-هوداک استفاده‌کرد.

حاصل روش‌های ذکرشده، برآوردی برای پارامتر تفاضلی‌است. پارامتر تفاضلی، برای تبدیل سری به سری‌ای که از مدل$ARMA(p,q)$ تبعیت‌می‌کند، به کارمی‌رود. بقیه‌ی پارامترهای مدل نیز باید برآوردشود.
اگر سری مشاهده‌شده‌ی X_t،$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)Z_t$ باشد، پارامتر تفاضلی برآوردشده‌ی $\hat{d}$، برای بدست‌آوردن سری$u_t = (1-B)^d X_t$ که از مدل $\phi(B)u_t = \theta(B)Z_t$ پیروی‌می‌کند؛ به‌کارمی‌رود.

مشکلی که در این محاسبات وجود دارد این است که $(1-B)^{\hat{d}}$، به عنوان یک چندجمله‌ای با تأخیر نامتناهی تعریف شده‌است. بنابراینu_t تنها زمانی می‌تواند محاسبه شود که یک تحقق نامتناهی از x_t موجودباشد. درنتیجه تبدیل نمی‌تواند به‌طورکامل انجام‌شود و نهایتاً یک تقریب از مدل ارائه‌می‌شود.

برای برآورد مدل $ARMA$، پس از برآورد پارامتر تفاضلی، دو روش توسط هاسکینگ(۱۹۸۱) و

جوک و پورتر-هوداک(۱۹۸۳)، ارائه شده است که به ترتیب بیان می‌کنیم. روش هاسکینگ، تبدیل دامنه‌ی زمانی و روش پورتر-هوداک، تبدیل دامنه‌ی طیفی است. این دو روش به‌ظاهر متفاوتند اما به نتایج یکسانی منجرمی‌شوند.

روش هاسکینگ

در دامنه‌ی زمانی، نمایش AR برای تبدیل سری استفاده‌شده‌است. اگر u_t سری میانگین متحرک-اتورگرسیو باشد و توسط مدل $(1-B)z_t = u_t$ نمایش داده‌شود، با بسط $(1-B)^d$، می‌توان‌نوشت:

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-d+j)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}.x_{t-j} \tag{۲.۲}$$

عبارت بالا بیان‌می‌کند که پس از بدست‌آوردن $\hat{d}$، یک تقریب از $ARMA$ می‌تواند با استفاده از مدلAR بریده‌شده، حاصل‌شود. به عنوان مثال با قراردادن $\hat{d}$ به جای d در ۱۱.۱ و همچنین $z_{t-j} = 0$ برای $t-j$هایی که خارج از نمونه‌قرارمی‌گیرند، برآورد مدل مربوطه بدست‌می‌آید.

روش پورتر-هوداک

این روش بر پایه دامنه فرکانسی است. تبدیل فوریه سری مشاهده‌شده را محاسبه‌کنید، حاصل را در تبدیل فوریه‌ی عملگر تفاضلی کسری، ضرب‌کنید. معکوس تبدیل فوریه سری بدست‌آمده، از $ARMA(p,q)$ پیروی‌می‌کند.

در روش‌های برآورد دومرحله‌ای از آنجا که d به طور سازگار برآوردشده است، روش‌های برآورد دو مرحله‌ای، همه سازگارند اما در تمام تحققهای متناهی سری‌زمانی، این روش‌ها موجب ایجاد همبستگی در باقیمانده‌ها می‌شوند. دو شق دیگر برای روش‌های دومرحله‌ای پیشنهادشده‌است.

لی و ام‌سی‌لود(۱۹۸۶)، پیشنهاد داد که مجموع نامتناهی‌ای که $(1-B)^{-d}$ را تعریف می‌کند، قطع‌کنیم و از روش معمول برآورد $ARMA$، استفاده‌نمائیم. بریدن سری نامتناهی، معادل روش هاسکینگ است که منجر به برآوردهای نادرست می‌شود.

روش دیگر که در فاکس و تاک(۱۹۸۶)، پیشنهادشده‌است تقریبی از ماکزیمم کردن تابع درستنمایی گاوسی است که به طور همزمان، تمام پارامترهای مدل یک متغیره را بدست‌می‌آورد. این برآوردها سازگار اند و توزیع تقریبی نرمال دارند و با سرعت معمول ریشه‌ی دوم T، همگرا می‌شوند. اما همانطور که دلهاوس(۱۹۸۸)، اشاره‌کرده‌است، رفتار نمونه‌ی کوچک این نوع از برآوردگرها ضعیف است.

۱.۳.۲ روش برآورد بیشترین درستنمایی دقیق

برای برآورد پارامترهای یک سری‌زمانی مانای جمع‌بسته‌ی کسری برداری، با چندین پارامتر تفاضلی، تابع درستنمایی غیرشرطی دقیق توسط سوئل به‌کارگرفته‌شد.

z_t، سری مانای جمع‌بسته‌ی کسری برداری $k \times ۱$، را درنظربگیرید که در آن $|d_i| < \frac{۱}{۲}$ است. Z_T نیز یک بردار $kT \times ۱$ از T مشاهده است به‌طوریکه $Z_T = [z'_۱, z'_۲, \cdots, z'_T]$ و $Z_T \sim N(kT, \Sigma)$. تابع چگالی احتمال Z_t به شکل زیر است:

$$f(Z_T, \Sigma) = (۲\pi)^{-(kT)/۲} |\Sigma|^{-۱} exp\{-\frac{۱}{۲} z_{T'} \Sigma^{-۱} z_T\} \quad (۲.۲)$$

یک نمایش تاپلیتز از ماتریس کوواریانس

$$\Sigma_{kT \times kT} = [\Sigma_{(i-j)}]$$

که $\Sigma_{(r)} = E[z_t z'_{t+r}]$، اتوکوواریانس‌های z_t هستند. تابع درستنمایی برای نمونه‌ی داده‌شده و مدل پارامتری شده، زمانی‌که ماتریس کوواریانس نیز بر اساس پارامترهای مدل نوشته‌شده‌باشد، می‌تواند برآوردشود.

سوئل، روش زیر را برای پارامتری‌کردن مدل مورد استفاده قرار داد:

۱. مدل سری زمانیz_t به‌شکل میانگین متحرک نمایش داده‌شود.

۲. تابع چگالی طیفیz_t محاسبه‌شود.

۳. تابع اتوکوواریانس، $\Sigma(s)$ توسط

$$\Sigma(s) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{\circ}^{۲\pi} f_z(\lambda) e^{i\lambda s} d\lambda. \quad (۲.۲)$$

در ادامه به شرح مراحل گفته‌شده پرداخته می‌شود.

۲.۳.۲ مدل عمومی

مدل $\Theta(B)D(B)Vx_t = \phi(B)z_t$ که در آن$\Theta(B)$ و$\phi(B)$ ماتریس‌های چندجمله‌ای $k \times k$ در تأخیرBو از مرتبه‌ی به ترتیبp و q هستند. فرض شده که$D(B) = diag[(۱-B)^{d_۱}, (۱-B)^{d_۲}, \cdots, (۱-B)^{d_k}]$ ، $\Theta(\circ) = \phi(\circ) = I_k$ ، ریشه‌های $|\Theta(\xi)|$ و $\phi(\xi)$ خارج از دایره‌ی واحد هستند و و ماتریسV، $k \times k$ و ناتکین است. همچنین $\varepsilon_t \sim IID.N_k(\circ, \Sigma)$.

در مدل معرفی‌شده، عناصر مختلف بردارz_t ، مقادیر متفاوتی از جمع‌بستگی اتخاذمی‌کند.($i \neq j, d_{ij}$) . با وجودV در مدل، حضور برخی ترکیب‌های خطی در مدل که از درجه‌ی جمع‌بستگی کمتری نسبت به عناصر z_t برخوردارند، ممکن می‌شود. در این صورت گفته‌می‌شود سری زمانی z_t هم‌جمع‌بسته است. اگرz_t هم‌جمع‌بسته باشد، پارامترهای ماتریس V ضرایب هم‌جمعی هستند و در غیر این‌صورت (z_t هم‌جمع‌بسته نباشد)، $V = I_k$.

فرآیندu_t را به شکل $u_t = D(B)Vz_t$ تعریف‌کنید.مفروضاتی که برایz_t درنظر گرفته شد به سری‌زمانی برداریu_t نیز که توسط فرآیند$ARMA(p,q)$ یعنی $\Theta(B)u_t = \phi(B)\varepsilon^t$، ساخته‌شده؛ اعمال می‌شود.

۳.۳.۲ تابع چگالی طیفی u_t

نمایش ولد سری u_t به‌شکل

$$u_t = \Theta(B)^{-1}\phi(B)\varepsilon_t = \frac{B(B)}{A(B)}\varepsilon_t \qquad (۲.۲)$$

است. $B(B)$ یک ماتریس چندجمله‌ای از درجه‌ی $M \leq (k-1)p+q$ و $A(B)$ یک چندجمله‌ای عددی از درجه‌ی $H \leq kp$ است. ریشه‌های $A(\xi)$ خارج از دایره‌ی واحد قرارمی‌گیرد، بنابراین $A(\xi)$ می‌تواند به‌شکل

$$A(\xi) = \prod_{n=1}^{H}(1-\rho_n\xi)^{-1} \qquad , \qquad |\rho|<1 \qquad ,n=1,2,...,H \qquad (۲.۲)$$

نمایش‌داده‌شود. و نهایتاً چگالی طیفی u_t، $f_u(\lambda)$:

$$f_u(\lambda) = \frac{B(w)\Sigma B(w)^{-1}}{A(w)A(w^{-1})} = B(w)\Sigma B(w^{-1})\prod_{n=1}^{H}(1-\rho_n w)^{-1}\times(1-\rho_n w^{-1})^{-1} \qquad (۲.۲)$$

است که $w=e^{-i\lambda}$. بافرض اینکه ریشه‌های $A(\xi)$ همه یکتا هستند، می‌توانیم با استفاده از تجزیه‌ی کسری جزئی حاصل‌ضرب، داشته‌باشیم:

$$f_u(\lambda) = B(w)\Sigma B(w^{-1})\sum_{j=1}^{H} w^H\zeta_j\left[\frac{\rho_j^{2H}}{(1-\rho_j w)} - \frac{1}{(1-\rho_j^{-1}w)}\right] \qquad (۲.۲)$$

که‌در آن

$$\zeta = \frac{1}{\rho_j\prod_{i=1}^{H}(1-\rho_i\rho_j)\prod_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{H}(\rho_j-\rho_m)}. \qquad (۲.۲)$$

توجه‌کنید که $B(w)$ از درجه‌ی متناهی است. بنابراین هر عنصر از $B(w)\Sigma B(w^{-1})$ می‌تواند به‌شکل یک چندجمله‌ای متناهی، با توان‌های مثبت و منفی، در w نوشته‌شود. چگالی طیفی u_t با نمایش عنصر(i,j) ام به شکل $f_u(\lambda)=[f_u(\lambda)_{i,j}]$ نوشته‌شود. که

$$f_u(\lambda)_{i,j} = \sum_{-M}^{M}\psi_{i,j}(l)w^l\sum_{m=1}^{H}w^H\zeta_m\left[\frac{\rho_m^{2H}}{(1-\rho_m w)} - \frac{1}{(1-\rho_m^{-1}w)}\right] \qquad (۲.۲)$$

اگر عنصر(i,j) از $B(w)$ به شکل زیر نشان‌داده‌شود:

$$B_{i,j}(w) = \sum_{n=0}^{M}B_{i,j}(n)w^n \qquad (۲.۲)$$

و عنصر (i,j)ام ازΣ، σ_{ij} است و $\psi_{ij}(l)$ به‌فرم زیر باشد:

$$\psi_{ij}(l) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=max[0,l]}^{min[M,M-l]}\sigma_{ht}\cdot B_{i,h}(s)\cdot B_{j,t}(s-l). \qquad (۲.۲)$$

چگالی طیفی هر مدل برداری$ARMA(p,q)$ به‌شکل ۳.۱۱.۱ می‌تواند نوشته‌شود.

چگالی طیفی z_t

نمایش MA از Vz_t به‌شکل $z_t = V^{-1}D(B)^{-1}u_t$ است. به این معنی که چگالی طیفی z_t می‌تواند به‌شکل

$$f_z(\lambda) = V^{-1}D(w)^{-1}f_u(\lambda)D(w^{-1})^{-1}v^{-1\prime} \tag{۲.۲}$$

نوشته‌شود.با بسط و استفاده از چگالی طیفی u_t چگالی طیفی z_t می‌تواند توسط نمایش عنصر (i,j) نوشته‌شود.

$$\begin{aligned} f_z(\lambda) &= [f_z(\lambda)_{i,j}] \\ f_z(\lambda)_{i,j} &= \sum_{n=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} V^{in}V^{jr}f_u(\lambda)_{n,r}(1-w)^{-d_n}(1-w^{-1})^{-d_r} \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

عنصر (i,j) از V^{-1} توسط V^{ij} نمایش داده‌می‌شود. در حالتی‌که $V = I_k$ چگالی طیفی z_t به‌صورت زیر حاصل‌می‌شود:

$$f_z(\lambda)_{i,j} = f_u(\lambda)_{i,j}(1-w)^{-d_i}(1-w^{-1})^{-d_j} \tag{۲.۲}$$

با جایگزاری در شکل عمومی مدل، برای $f_u(\lambda)_{i,j}$، عنصر (i,j) از $f_z(\lambda)$ می‌شود:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=-M}^{M}\sum_{m=1}^{H}\sum_{n=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} V^{in}.V^{jr}\psi_{n,r}(l)\xi_m\Big[\frac{\rho_m^{2H}}{(1-\rho_m w} - \frac{1}{(1-\rho_m^{-1}w)}\Big] \\ &\qquad \times(1-w)^{-d_n}(1-w^{-1})^{-d_r}w^{H+l} \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

عبارت بالا، فرم عمومی چگالی عنصر(i,j) ام از چگالی طیفی بردار سری‌زمانی $k\times 1$ است که توسط مدل جمع‌بسته‌ی کسری $ARMA(p,q)$ ساخته‌شده‌است.

۴.۲ اتوکوواریانس z_t

s امین اتوکوواریانس z_t توسط ۳ محاسبه‌می‌شود. با ساختار(i,j) امین عنصر، تابع چگالی طیفی، به انتگرال زیر کاهش‌می‌یابد.$(w = e^{-i\lambda})$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\rho^{2H}}{(1-\rho e^{-i\lambda}} - \frac{1}{(1-\rho^{-1}e^{-i\lambda}}\Big](1-e^{-i\lambda})^{-w}(1-e^{i\lambda})^{-V}e^{-i\lambda h}d\lambda \tag{۲.۲}$$

این انتگرال با نماد $c(w,v,h,\rho)$ نشان داده‌می‌شود.(i,j)امین عنصر از sامین اتوکوواریانس را می‌توان به‌شکل زیر نمایش داد:

$$\sum_{l=-M}^{M}\sum_{m=1}^{H}\sum_{n=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} V^{in}V^{jr}\psi_{n,r}(l)\zeta_m c(d_n,d_r,H+l-s,\rho_m) \tag{۲.۲}$$

چون i و j تنها در پارامترهای V ظاهر می‌شوند, هر عنصر از اتوکوواریانسS ترکیب خطی از مقادیر یکسان $c(d_n, d_r, h, \rho_m)$ دارد. این ترکیب اجازه‌می‌دهد ارزیابی سریع‌تری از اتوکوواریانس‌ها داشته‌باشیم و هر عنصر آن را، جمله به جمله، محاسبه کنیم. اگر $P = ۰$ تجزیه جزئی‌کسری نیازنیست و اتوکوواریانس‌ها به شکل

$$\sum_{l=-q}^{q}\sum_{n=۱}^{k}\sum_{r=۱}^{k} V^{in}V^{jr}\psi_{n,r}(l)\frac{\Gamma(۱-d_n-d_r)\Gamma(d_r+s-l)}{\Gamma(d_r)\Gamma(۱-d_r)\Gamma(۱-d_n-s+l))} \tag{۲.۲}$$

که به آسانی قابل محاسبه‌است.

۱.۴.۲ شکل غیرانتگرالی$c(w, v, h, \rho)$

معمولا اتوکوواریانس‌ها $p \neq ۰$ به شکل تابع $c(w, v, h, \rho)$ که به عنوان یک انتگرال تعریف‌شده، نوشته‌می‌شود. برای محاسبه اتوکوواریانس‌ها فرمول دیگر این تابع که آسان‌تر تخمین‌زده‌می‌شود، به کارمی‌رود.

توجه کنید که متغیرh، هر مقدار صحیحی را می‌تواند اتخاذکند، p می‌تواند هرمقدار مختلط در دایره‌ی واحد را بگیرد. درحالی که v وw تنها مقادیر حقیقی در بازه باز $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ را می‌توانند اتخاذ کنند. با استفاده از بسط سری‌های هندسی $c(w, v, h, \rho)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\rho^{۲H}\sum_{m=۰}^{\infty} .\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}(۱-e^{-i\lambda})^{-w}.(۱-e^{i\lambda})^{-V}.e^{-i\lambda(h+m)}d\lambda$$
$$+\sum_{n=۱}^{\inf}\rho^{n}\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}(۱-e^{-i\lambda})^{-w}(۱-e^{i\lambda})^{-v}e^{-i\lambda(h-n)}d\lambda$$

که مسأله به محاسبه زیر کاهش‌می‌یابد:

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}(۱-e^{-i\lambda})^{-w}(۱-e^{i\lambda})^{-v}e^{-i}d\lambda \tag{۱.۲}$$

چون

$$\begin{aligned}(۱-e^{i\xi}) &= ۲sin(\frac{\xi}{۲})e^{i(\xi+۳\pi)/۲} \\ &= ۲sin(\frac{\xi}{۲})e^{i(\xi-\pi)/۲}\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

می توان۱.۱۲.۱ را به شکل زیر نوشت:

$$= \frac{۲^{-w-v}}{\pi}e^{i\pi(v-w)/۲}\int_{۰}^{\pi}(sin(z))^{-w-v}.e^{i(۲h+w-v)z}dz =$$
$$\frac{\Gamma(۱-w-v)(-۱)^{h}}{\Gamma(۱-w-h)\Gamma(۱-v+h)}$$

در انتها :

$$c(w,v,h,\rho)=\Gamma(۱-w-v)[\rho^{۲H}\sum_{m=۰}^{\infty}\frac{\rho^{m}(-۱)^{h+m}}{\Gamma(۱-w+h+m)\Gamma(۱-v-h-m)} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\rho^{n}(-۱)^{h-n}}{\Gamma(۱-w+h-n)\Gamma(۱-v-h+n)} \qquad (۰.۲)$$

۵.۲ برآورد پارامترهای مدل جمع‌بسته‌ی کسری به روش بیشترین درستنمایی شرطی دوربین-لوینسن

الگوریتم بیشترین درستنمایی دوربین-لوینسن ($CLDL$)توسط تسی(۲۰۱۰) معرفی شد و پس از آن تسی(۲۰۱۲) از این روش برای برآورد برداری از سری‌های زمانی ساختاری استفاده کرد. مدل میانگین متحرک-اتورگرسیو برداری هم‌جمع بسته‌ی کسری، زیرمجموعه‌ای از آن مدل‌هاست. این الگوریتم اثرهای بلند مدت(d_i) و ضرایب کوتاه مدت را یکجا برآورد می‌کند. روش پیشنهادی تسی(۲۰۱۰) یک فرض اساسی را در نظر می‌گیرد که موجب سبک‌تر شدن بار محاسباتی به میزان قابل توجهی می‌شود. (۱.۲)

مدل چند متغیره‌ی

$$\Phi(B)diag(\overset{d}{\nabla})\mathbf{X}_t=\Theta(B)\mathbf{Z}_t \qquad (۲.۲)$$

را در نظر بگیرید. تسی(۲۰۱۰) شرطی را در نظر می‌گیرد که بتوان مدل ۱.۱۳ را به شکل زیر نمایش داد:

$$diag(\overset{d}{\nabla})\Phi(B)\mathbf{X}_t=\Theta(B)\mathbf{Z}_t. \qquad (۲.۲)$$

برای حالتی که تنها یک متغیر داشته باشیم، مدل ۱.۱۳ و ۱.۱۳ یکسان هستند. البته تسی(۲۰۱۰) بیان می‌کند که با برقراری این شرط، مدل هنوز انعطاف‌پذیری قبل را داراست، چون هیچ محدودیتی روی پارامترهای MA اعمال نشده است.

شرط مفروض برای انجام الگوریتم تسی

با علم به این‌که داده‌ها توسط رابطه‌ی ۱.۱۳ ایجاد شده است، فرض بر این است که:

الف) $\Phi(B)$ قطری است یا ب) مقادیر d_i با تغییر i تغییر نمی‌کند. برای محاسبه‌ی الگوریتم $CLDL$ مراحل زیر باید انجام شود:

۱. ماتریس کواریانس سری مورد مطالعه باید محاسبه شود.

۲. با استفاده از الگوریتم دوربین-لوینسن (DL)ضرایب Φ_{nj} و υ_i بدست آید.

۳. با جایگزاری مقادیر بدست آمده در مراحل قبل، تابع درستنمایی نوشته شود.

۴. مقدار بیشینه‌ی تابع درستنمایی را با استفاده از الگوریتم شبه نیوتنِ برویدن، فلشر، گلدفرب و شانو ($BFGS$) محاسبه شود.

الگوریتم دوربین-لوینسن چندمتغیره و نحوه‌ی محاسبه‌ی بازگشتی تابع درستنمایی در فصل اول توضیح داده شده است. کافی است ماتریس کوواریانس سری زمانی چند متغیره معرفی شود تا با جایگزاری مقادیر حاصل در الگوریتم DL و تابع درستنمایی نتیجه‌ی برآورد حاصل شود. (۲.۲)

سری اغتشاش جمع‌بسته‌ی کسری قبلا معرفی شد و تابع اتوکوواریانس آن بر اساس آنچه تسی(۲۰۱۰) محاسبه کرده بود؛ بدست آمد. برای مشاهده‌ی نتایج به مراجعه نمائید. در ادامه به محاسبه‌ی تابع اتوکوواریانس

۶.۲ مقایسه‌ی روش $CLDL$ با روش‌های قبلی

تسی(۲۰۱۲) برای نشان دادن برتری روش $CLDL$ ، این الگوریتم را برای داده‌های پذیرش کنگره که در مقاله‌ی دور و همکاران(۱۹۹۷) معرفی شد، مورد استفاده قرار داد. چون در تحقیقات دیگری با استفاده از روش های برآورد مختلف از این داده‌ها استفاده شده است، تسی توانسته با این کار، مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف برآورد داشته باشد که در ادامه به نتایج حاصل اشاره می‌شود:

۱. الگوریتم $CLDL$ یک الگوریتم یک مرحله‌ای بر اساس برآورد بیشترین درستنمایی است و می‌تواند اثرهای بلند مدت را همراه مولفه‌های کوتاه مدت، برای مدل ساختاری$VARFIMA$ به طور همزمان محاسبه کند در صورتی که روش‌های قبلی از جمله باکس و تاملینسون(۲۰۰۰) در بیش از یک مرحله انجام می‌گرفت. فرآیند یک مرحله‌ای همیشه کاراتر از فرآیندهای دو یا چند مرحله‌ای است. همچنین برآورد حاصل از این الگوریتم، سازگار است.

۲. الگوریتم$CLDL$ می‌تواند تابع بیشترین درستنمایی شرطی را برای مدل‌های ساختاری $VARFIMA$ دقیقاً ارزیابی کند و این مزیت بزرگی برای این روش است زیرا الگوریتم سوئل(۱۹۸۹) و دیوکر و استارتز(۱۹۹۸) زمانی‌که پارامتر $AR(.)$ در مدل وجود داشته باشد، ناچارند خطا را در نقطه‌ای گرد کنند و از تقریب استفاده کنند. با افزایش بعد مشاهدات اهمیت و نیاز به گرد کردن خطا در مدل‌های ذکر شده‌ی قبلی، مشهودتر می‌شود.

۳. چون در محاسبات $CLDL$ از الگوریتم کارای دوربین-لوینسن استفاده شده است، این روش بسیار سریعتر از آنچه در سوئل(۱۹۸۹) و دیوکر و استارتز(۱۹۹۸) گفته شده است، انجام می‌شود. دیوکر و استارتز(۱۹۹۸) نشان دادند که هر دور از محاسبات تابع درستنمایی برای الگوریتم

سوئل، در یک مدل دو متغیره‌ی $VARFIMA$ با ۱۲۱ مشاهده و ۱۸ پارامتر، حدود ۳۵ دقیقه زمان از یک کامپیوتر با سرعت MHZ۲۰۰ می‌گیرد. تسی(۲۰۱۰) یک آزمایش مونت کارلو برای مدل سه بعدی$VARFIMA$ و اندازه نمونه‌ی ۴۰۰ تایی تشکیل داد که به وضوح، محاسبات این الگوریتم، زمان کمتری نسبت به الگوریتم‌های قبلی برد.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمال .... probability (۳.۲)

احتمال پسینی .... posterior probability (۴.۲)

احتمال پیشینی .... prior probability (۵.۲)

احتمال رخداد .... occurrence probability (۶.۲)

احتمال گزاره‌ای .... propositional probability (۷.۲)

احتمال مشاهده‌محور .... observation probability (۸.۲)

اصل موضوع .... axiom (۹.۲)

اصول موضوعه‌ی تحویل .... reduction axioms (۱۰.۲)

اعلان عمومی .... public announcement (۱۱.۲)

اندازه‌ی احتمالاتی .... probability measure (۱۲.۲)

اندازه‌ی احتمالاتی درونی .... inner probability measure (۱۳.۲)

ایستا .... static (۱۴.۲)

باور .... belief (۱۵.۲)

به‌روزرسانی .... update (۱۶.۲)

Surname: Name: (2.17)

Title: Cointegration and fractional cointegration Models: Estimation and Testing (2.18)

Supervisor: Advisor: (2.19)

Degree: Master of Science Subject: Department of Mathematics (2.20)

Field: Mathematical Logic (2.21)

Shahid Beheshti University Faculty of Mathematical Sciences (2.22)

Date: December2013 Number of pages: 38 (2.23)

Keywords: cointegration, fractional cointegration, unit root, long memory,econometrics (2.24)

Abstract

-abstract

Shahid Beheshti University

Faculty of Mathematical Sciences

Department of Mathematics

M. Sc. Thesis

Cointegration and fractional cointegration Models: Estimation and Testing

by

ذ ت

Supervisor

Advisor

December2013