پاسخ سوالات آمار و احتمال آزمون کارشناسی ارشد
مهندسی صنایع- گرایش صنایع۱۳۹۲
borna۵۱۹@yahoo.com

۱. در ظرفی n توپ با شماره های $1,2,\dots,n$ وجود دارد. یک توپ را به تصادف انتخاب و پس از یادداشت کردن شماره آن به ظرف برمی‌گردانیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا اینکه توپی برای دومین بار برداشته شود. چنانچه X را تعداد دفعات آزمایش در نظر بگیریم. $p(x=k)$ برابر کدام است؟

۱. $\frac{n!(k-1)}{(n-k+1)!n^k}$

۲. $\frac{(n-k+1)!(k-1)}{n^k}$

۳. $\frac{(n-k+1)!k}{n^k}$

۴. $\frac{n!k}{(n-k+1)!n^k}$

جواب:

$$P(X=k)=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))\binom{k-1}{1}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{\text{k}}}=\frac{P^n_{k-1}(k-1)}{n^k}=\frac{n!}{(n-k+1)!n^k}$$

۲. در یک آزمایش، زمان رسیدن به نتیجه، متغیر تصادفی نمایی X با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ و تعداد تکرار آزمایشات برای رسیدن به نتیجه مطلوب، بطور مستقل، متغیر تصادفی هندسی Y با احتمال موفقیت p است. حاصل $p(X+Y)>2$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

۱. $pe^{-\lambda}$

۲. $(1+p)e^{-\lambda}$

۳. $(1-p)+pe^{-\lambda}$

۴. $p+(1-p)e^{-\lambda}$

جواب:

$$\begin{aligned}P(X+Y>2)&=P(X+Y>2|Y=1)P(Y=1)+P(X+Y>2|Y\geq 2)P(Y\geq 2)=\\&P(X>1|Y=1)P(Y=1)+P(X>0|Y\geq 2)P(Y\geq 2)=(1-p)+pe^{-\lambda}\end{aligned}$$

۳. فرض کنید X_1 و X_2 دارای تابع چگالی احتمال توام $0<X_2<1$ و $0<X_1<1$ و $f(X_1,X_2)=2X_2$ باشند. مقدار $p(X_1^2<X_2<X_1)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{6}$

۲. $\frac{5}{6}$

۳. $\frac{7}{15}$

۴. $\frac{2}{15}$

جواب:

$$P(X_1^2<X_2<X_1)=\int_0^1\int_{x_1^2}^{x_1}2x_2\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1=\int_0^1(x_1^2-x_1^4)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

۴. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با نرخ λ و $X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n$ نمونه‌های تصادفی مستقل‌اند که از X گرفته شده‌اند. مقدار احتمال $P(X_i > \sum_{j \neq i} X_j)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2^n}$
۲. $\frac{1}{2^{n-1}}$
۳. $\frac{1}{\lambda^n}$
۴. $\frac{1}{\lambda^{n-1}}$

جواب:

$$P(X_i > \sum_{i \neq j} x_j) = (\frac{1}{2})^{n-1}$$

که X_i دارای توزیع $Exp(\lambda)$ و $\sum_{i \neq j} x_j$ دارای توزیع $\Gamma(\alpha = n-1, \lambda)$ است.

۵. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با میانگین $\beta = 2$ باشند؛ و $Y = \max(x_1, x_2)$ باشد، آنگاه $var(Y)$ کدام است؟

۱. ۱
۲. ۴
۳. ۵
۴. ۶

جواب:

$$y = \max(X_1, X_2)$$

$$E(y^m) = \frac{m!}{\lambda_1^m} + \frac{m!}{\lambda_2^m} - \frac{m!}{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}$$

$$var(y) = E(y^2) - E^2(y) = (\frac{2!}{(\frac{1}{2})^2}) + (\frac{2!}{(\frac{1}{2})^2}) - (\frac{2!}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2}) - ((\frac{1}{(\frac{1}{2})}) + (\frac{1}{(\frac{1}{2})}) - (\frac{1}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}))^2 = 14 - 3^2 = 5$$

۶. یک سکه که احتمال شیر آمدن در آن $\frac{1}{2}$ است آنقدر پرتاب می شود تا نتیجه دقیقا دو پرتاب از آخرین سه پرتاب آن، شیر باشد. اگر متغیر تصادفی N بیانگر تعداد پرتاب‌های این سکه باشد $E(N)$ کدام است؟

۱. ۳
۲. $\frac{11}{3}$
۳. $\frac{11}{7}$
۴. $\frac{14}{3}$

جواب:

$$E(X) = E(X|T)(\tfrac{1}{2}) + E(X|H)(\tfrac{1}{2})$$

از طرفی داریم: $E(X|T) = E(X) + 1$ و $E(X|H) = E(X|HT)P(T) + E(X|HH)P(H)$
جایگذاری: $P(T) = P(H) = \frac{1}{2}$ و

$$E(X|HH) = 2 \qquad E(X|HT) = E(X|HTT)(\tfrac{1}{2}) + E(X|HTH)(\tfrac{1}{2}) = (E(X) + 3)(\tfrac{1}{2}) + 3(\tfrac{1}{2})$$

$$E(X) = \tfrac{14}{3}$$

۷. فرض کنید $S(t)$ بیانگر قیمت یک کالا در زمان $t(t \geq 0)$ باشد. قیمت این کالا در صورت ایجاد شوک‌های اقتصادی تغییر می‌کند. اگر $N(t)$ بیانگر تعداد شوک‌های اقتصادی تا زمان t باشد و متغیر تصادفی x_i بیانگر اثر شوک اقتصادی

i ام باشد، داریم: $S(t)=S(۰)\prod_{i=۱}^{N(t)} x_i$ و برای $N(t)=۰$ داریم: $\prod_{i=۱}^{N(t)} x_i=۱$ حال اگر x_i ها متغیر تصادفی نمایی مستقل با نرخ μ ،$N(t), t\geq ۰$ یک فرآیند پواسون با نرخλ و مستقل از x_iها و $S(۰)=s$ باشد، آنگاه$E(S^{۲}(t))$ کدام است؟

۱. $S^{۲}\lambda(\frac{۱}{\mu^{۲}})^n$

۲. $S^{۲}e^{(-\lambda t+\frac{\lambda t}{\mu^{۲}})}$

۳. $S^{۲}\lambda(\frac{۲}{\mu^{۲}})^n$

۴. $S^{۲}e^{(-\lambda t+\frac{۲\lambda t}{\mu^{۲}})}$

جواب:

$$E(S^{۲}(t))=E((S(۰)\prod_{i=۱}^{N(t)} x_i)^{۲})=S^{۲}(۰)E(\prod_{i=۱}^{N(t)} {x_i}^{۲})=S^{۲}(۰)E(E(\prod_{i=۱}^{N(t)} {x_i}^{۲})|N(t)))$$

که: $E(\prod_{i=۱}^{N(t)} {x_i}^{۲})|N(t))=(\frac{۲}{\mu^{۲}})^{N(t)}$

در نتیجه داریم:

$E(S^{۲}(t))=S^{۲}(۰)E((\frac{۲}{\mu^{۲}})^{N(t)})=S^{۲}e^{(-\lambda t+\frac{۲\lambda t}{\mu^{۲}})}$

۸. متغیرهای تصادفی X,Y مستقل از هم و به ترتیب دارای تابع چگالی احتمال $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x\geq ۰$ و $f(y)=\mu e^{-\mu y}, y\geq ۰$ هستند. $E(X-Y|X<Y)$ کدام است؟

۱. $\frac{۱}{\lambda}-\frac{۱}{\mu}$

۲. $-\frac{۱}{\mu}$

۳. $(\frac{۱}{\lambda}-\frac{۱}{\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

۴. $(-\frac{۱}{\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

جواب:

$$E(X-Y|X<Y)=\int_{۰}^{\infty}E(X-Y|X<Y,X=x)f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{۰}^{\infty}(x-(x-\frac{۱}{\mu}))f_X(x)\mathrm{d}x=-\frac{۱}{\mu}$$

۹. عمر یک قطعه الکترونیکی طبق توزیع نمایی با میانگینλ است. این قطعه را به دو دلیل عوض می‌کنند، یا خراب می‌شود، و یا عمرش به T می‌رسد. میانگین مدت زمانی که طول می‌کشد، تا این قطعه را عوض کنند، چقدر است؟

۱. $\lambda(۱-e^{-\frac{T}{\lambda}})$

۲. $Te^{-\frac{T}{\lambda}}$

۳. $\lambda(۱-e^{-\frac{T}{\lambda}})+Te^{-\frac{T}{\lambda}}$

۴. $\lambda e^{-\frac{T}{\lambda}}+T(۱-e^{-\frac{T}{\lambda}})$

جواب:

$$X\sim Exp(\lambda)$$

$$E(\min(X,T))=\lambda(۱-e^{-\frac{T}{\lambda}})$$

۱۰. از جاده‌ای که عرض آن معادل یک اتومبیل است، اتومبیل‌ها طبق فرآیند پواسون با آهنگ λ عبور می‌کنند. شخصی می خواهد عرض این جاده را طی کند. مدت زمان عبور او ثابت و برابر T است. به طور متوسط چند اتومبیل از جلوی این شخص عبور می‌کنند تا وی فرصت عبور از جاده را پیدا کند؟

۱. $(۱ - e^{-\lambda T})^{-۱}$
۲. $e^{-\lambda T}$
۳. $e^{\lambda T}$
۴. $e^{\lambda T} - ۱$

جواب: تعداد اتومبیل‌هایی که از جلوی این شخص عبور می‌کند تا وی فرصت عبور پیدا کند، تعداد شکست‌ها قبل از رسیدن به اولین موفقیت یعنی رد شدن شخص از خیابان است.
برای اینکه شخص عبور کند باید در مدتT واحد زمانی هیچ اتومبیلی عبور نکند. یعنی: $P(X > T) = e^{-\lambda T}$ احتمال موفقیت است.
Y را برابر با تعداد اتومبیل‌هایی که از جلوی شخص عبور می‌کنند در نظر می‌گیریم.

$$E(Y) = \frac{q}{p} = \frac{۱ - e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}} = e^{\lambda T} - ۱$$

۱۱. $X_۱, X_۲, \cdots, X_{۱۰۰}$ یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از یک توزیع نمایی با میانگین۰/۵ می‌باشد. مقدار تقریبی $P(\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i > ۵۷)$ کدام است؟

۱. ۰/۰۸
۲. ۰/۱۶
۳. ۰/۳۱
۴. ۰/۳۸

جواب:

$$P(\sum_{i=۱}^{۱۰۰} x_i > ۵۷) = P(Z > \frac{۵۷ - ۵۰}{۵}) = P(Z > ۱/۴) = ۰/۰۸$$

۱۲. $y_۱, y_۲, \cdots, y_۹$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس$\sigma^۲$ باشد. مقدار C در رابطه زیر برابر کدام است؟ (S انحراف معیار نمونه y است) $P(-C \le \frac{\bar{Y}}{S} \le C) = ۰/۹۵$

۱. ۰/۷۵۴
۲. ۰/۷۴۳
۳. ۲/۲۶۲
۴. ۲/۲۸۲

جواب: $P(-C \le \frac{\bar{Y}}{S} \le C) = P(-C\sqrt{n} \le \frac{\bar{Y}-۰}{S}\sqrt{n} \le C\sqrt{n}) = P(-۳C \le t_۸ \le ۳C) = ۰/۹۵$
$C = ۲/۳۰۶$
$C = \frac{۲/۳۰۶}{۳} = ۰/۷$
احتمالا طراح ۲/۲۶۲ را بر ۳ تقسیم کرده که حاصل آن ۰/۷۵۴ شده است که غلط است.

۱۳. شخصی روزانه دو نوع صورت حساب دریافت می‌کند که هر صورت حساب به صورت مستقل از نوع اول و یا از نوع دوم است. یک روز مشخص، برای وی ۷ صورت حساب فرستاده می شود که در این بین ۲ صورت حساب گم می‌شود. اگر از۵ صورت حساب دریافتی، ۳ تا از نوع اول و ۲ تا از نوع دوم باشند، بر اساس روش حداکثر درست نمایی، نوع صورت حساب‌های گم شده را برآورد نمایید؟

۱. اطلاعات مسئله کافی نیست.
۲. هر دو از نوع دوم بوده اند.
۳. یکی از نوع اول و یکی از نوع دوم بوده است.
۴. هر دو از نوع اول بوده اند.

جواب: سه حالت داریم: در حالت اول: فرض می‌کنیم یکی از صورت حساب‌های گمشده از نوع اول و دیگری از نوع دوم بوده است داریم: $\frac{۱۲}{\binom{۷}{۵}} = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۵}}$ درحالت دوم فرض می‌شود که هر دو صورت حساب گمشده از نوع اول باشند: $\frac{۱۰}{\binom{۷}{۵}} = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۷}{۵}}$
درحالت سوم فرض می‌شود که هر دو صورت حساب گمشده از نوع دوم باشند:
$\frac{۶}{\binom{۷}{۵}} = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۵}}$ مشاهده می‌شود در حالت اول بیشترین احتمال به دست می‌آید لذا گزینه ۳ صحیح است.

۱۴. متغیرهای تصادفی و مستقل $x_i; i = ۱, \cdots, n$ با توزیع گاما $x_i \sim Gamma(\alpha = ۳, \beta)$ و با میانگین $\mu_i = ۳\beta$ مفروض است.

کدام یک از موارد زیر می‌تواند همواره یک برآورد فاصله‌ای $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای β باشد؟

۱. $[\frac{\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}} ۳n}, \frac{\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} ۳n}]$
۲. $[\frac{۲\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}} ۶n}, \frac{۲\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} ۶n}]$
۳. $[\frac{\sum_{i=۱}^n x_i}{۳n+k_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{۳n}}, \frac{\sum_{i=۱}^n x_i}{۳n-k_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{۳n}}]$
۴. $[\min(\frac{-\sum_{i=۱}^n x_i - ۳n}{k_{\frac{\alpha}{۲}}}, \frac{\sum_{i=۱}^n x_i - ۳n}{k_{\frac{\alpha}{۲}}}), \max(\frac{-\sum_{i=۱}^n x_i - ۳n}{k_{\frac{\alpha}{۲}}}, \frac{\sum_{i=۱}^n x_i - ۳n}{k_{\frac{\alpha}{۲}}})]$

جواب:

$$x_i \sim \Gamma(۳, \beta) \quad \frac{۲}{\beta}\sum x_i \sim \chi^۲_{۶n} \quad \mu_i = ۳\beta$$

$$P(\chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}, ۶n} \leq \frac{۲}{\beta}\sum x_i \leq \chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}, ۶n}) = ۱ - \alpha$$

در نتیجه داریم: $P([\frac{۲\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{\frac{\alpha}{۲}} ۶n} \leq \beta \leq \frac{۲\sum_{i=۱}^n x_i}{\chi^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}} ۶n}]) = ۱ - \alpha$
گزینه ۲ صحیح است.

۱۵. فرض کنید $۰/۹, ۰/۴, ۰/۲, ۰/۷, ۰/۳$ یافته‌های یک نمونه ۵ تایی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد: $f(x) = ۲\theta^۲ x; ۰ < x < \frac{۱}{\theta}$ برآورد ماکزیمم درست نمایی $\hat{\theta}$ و برآورد به روش گشتاوری کدام است؟

۱. $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (\frac{۴}{۳}, \frac{۱۰}{۹})$
۲. $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (\frac{۱۳}{۱۵}, \frac{۱۰}{۹})$
۳. $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (\frac{۴}{۳}, \frac{۹}{۱۰})$
۴. $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (\frac{۱۱}{۱۵}, \frac{۹}{۱۰})$

جواب: $MLE(\frac{۱}{\theta}) = X_{(۱)} = ۰/۹$
در نتیجه داریم:
$MLE(\theta) = \frac{۱۰}{۹}$
$E(x) = ۲\theta^۲ \int_۰^{\frac{۱}{\theta}} x^۲ \mathrm{d}x = \frac{۲}{۳\theta} = \bar{X} = \frac{۱}{۲}$

از این رو داریم:
$MME(\theta) = \frac{۴}{۳}$

۱۶. یک سازنده ترازوهای دیجیتالی ادعا می‌کند که خطای اندازه‌گیری توسط دستگاه‌های وی توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیاری حداکثر به اندازه۰/۱ کیلوگرم دارد. میانگین صفر را می‌پذیریم اما برای بررسی انحراف معیار تجربه‌ای به این صورت انجام می‌دهیم که یک وزنه استاندارد یک کیلوگرمی را دو بار با دستگاه وی اندازه‌گیری می‌کنیم. در صورتی که جمع مربعات خطا از ۰/۲ بیشتر باشد، ادعای وی را در مورد انحراف معیار رد می‌کنیم. اگر نتایج حاصل از اندازه‌گیری دوبار وزنه استاندارد۱/۱ و ۱/۲ کیلوگرم باشد، مقدار $P-value$ برای این آزمون چقدر است؟

۱. $e^{۰/۲}$
۲. $e^{-۵}$
۳. $e^{-۰/۴}$
۴. $e^{-۲/۵}$

جواب: خطاها: ۰/۱ و ۰/۲

$\chi^{۲}_{.} = \frac{(۰/۱)^{۲}+(۰/۲)^{۲}}{(۰/۱)^{۲}} = ۵$

$P-value = P(\chi^{۲}_{۲} \geq \chi^{۲}_{.}) = P(\chi^{۲}_{۲} \geq ۵) = e^{-۲/۵}$

۱۷. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با نرخ‌های λ و μ باشند و داشته باشیم: $Z = \min(X,Y)$ و W دارای توزیع

$$W = \begin{cases} ۱ & , z = x \\ ۰ & , z = y \end{cases}$$

باشد. آنگاه کوواریانس(Z,W) چیست؟

۱. $\frac{\lambda}{(\mu+\lambda)^{۲}}$
۲. $\frac{\mu}{(\mu+\lambda)^{۲}}$
۳. $\frac{\mu^{۲}}{(\mu+\lambda)^{۲}}$
۴. $\frac{۲\mu}{(\mu+\lambda)^{۲}}$

جواب: داریم: $E(Z) = \frac{۱}{\mu+\lambda}$ و $E(W) = E(W|W=۱)P(W=۱) + E(W|W=۰)P(W=۰) = ۱ \cdot \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)} + ۰$

در نتیجه:

$E(ZW) = E(ZW|W=۱)P(W=۱) + E(ZW|W=۰)P(W=۰) = E(Z|W=۱)P(W=۱)$
$= E(X|X \leq ۶)P(X \leq ۶) = \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)^{۲}}$

از این‌رو $cov(Z,W)$ برابر است با: $E(ZW) - E(Z)E(W) = \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)^{۲}} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \cdot \frac{۱}{\mu+\lambda}$

به نظر می‌رسد طراح به اشتباه $E(X|X \leq ۶) = \frac{۱}{\lambda}$ قرار داده است.

۱۸. به منظور بررسی سه نوع فرمول‌بندی A و B,C بر روی یک ماده شیمیایی، به ازای هر فرمول، سه آزمایش انجام می‌شود که نتایج آن به شرح زیر است.

فرمول بندی	۱	۲	۳
A	۹/۹	۹/۹	۱۰/۱
B	۹/۷	۱۰/۰	۱۰/۱
C	۱۰/۲	۱۰/۱	۱۰/۰

آماره موثر بودن نوع فرمول‌بندی بر روی خواص ماده شیمیایی کدام است؟

۱. ۱
۲. ۱/۵
۳. ۱/۷۵
۴. ۲

جواب: همه داده‌ها را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم آماره تغییری نمی‌کند.

$\bar{X}_A = ۹۹\frac{۲}{۳}$ $\bar{X}_B = ۹۹\frac{۱}{۳}$ $\bar{X}_C = ۱۰۱$ $\bar{X}_{..} = ۱۰۰$

$SSE = \frac{۴۰}{۳}$ $\quad SST_r = ۳[(\frac{۲}{۳})^۲ + (\frac{۱}{۳})^۲ + ۱^۲] = ۳ \cdot \frac{۱+۴+۹}{۹} = \frac{۱۴}{۳}$ در نتیجه داریم: $F_\cdot = \frac{۴۲}{۴۰} = ۱/۰۵$

۱۹. اگر رابطه بین x و y به صورت $y = \frac{۱}{\alpha+\beta x+\epsilon}$ باشد، برآوردکننده حداقل مربعات β برابر کدام است؟

۱. $\frac{\sum(\frac{x_i}{y_i}) - n(\frac{\bar{x}}{\bar{y}})}{\sum x_i^۲ - n\bar{x}^۲}$

۲. $\frac{\sum \frac{x_i}{y_i}) - n\bar{y}(\frac{۱}{\bar{x}})}{\sum(\frac{۱}{x_i^۲} - n(\frac{۱}{\bar{x}^۲})^۲}$

۳. $\frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^۲ - n\bar{x}^۲}$

۴. $\frac{\sum(\frac{x_i}{y_i}) - n\bar{x}(\frac{۱}{\bar{y}})}{\sum x_i^۲ - n\bar{x}^۲}$

جواب: با تغییر $\frac{۱}{Y} = \alpha + \beta x + \epsilon$ و تغییر $Y_i = \frac{۱}{Y_i}$ داریم: $LSB(\beta) = \frac{\sum(\frac{x_i}{y_i}) - n\bar{x}(\frac{۱}{\bar{y}})}{\sum x_i^۲ - n\bar{x}^۲}$

۲۰. در یک طرح کاملا تصادفی برای مقایسه ۵ طرز رفتار اگر مجموع مربعات باقی مانده SSE برابر ۱۶۴ با ۸ درجه آزادی و مقدار آماره آزمون۴باشد. مجموع طرز رفتارهاSS_{trt} و تعداد کل واحدهای آزمایشn کدام است؟

۱. $SS_{trt} = ۳۸۴ \quad n = ۱۳$
۲. $SS_{trt} = ۳۲۸ \quad n = ۱۲$
۳. $SS_{trt} = ۳۲۸ \quad n = ۱۳$
۴. $SS_{trt} = ۳۸۴ \quad n = ۱۲$

جواب: $F_\cdot = \frac{\frac{SS_{trt}}{(k-۱)}}{\frac{SSE}{N-k}} = \frac{\frac{SS_{trt}}{(۵-۱)}}{\frac{۱۶۴}{۱۳-۵}} = ۴$

در نتیجه: $SS_{trt} = ۳۲۸ \quad n = ۱۳$

این متن با استفاده از حروف‌چینی پارسی در LaTeX ۲ε و با زی‌پرشین نوشته شده است.