جبر خطی و کاربردهای آن

گیلبرت استرنج

ترجمهٔ مهدی امیدعلی

فهرست مطالب

پیشگفتار نویسنده

جبر مانستگی ابزاری در جبر (و در توپولوژی جبری) برای اثبات قضایای وجود غیر سازنده است.

فصل ۱

ماتریسها و روش حذفی گاوس

۱.۱ مقدمه

این کتاب با مهمترین مسألهٔ جبر خطی شروع می‌شود: حل معادلات خطی. مهمترین حالت، و ساده‌ترین آن، وقتی است که تعداد معادلات با تعداد مجهولها برابر باشد. **n معادله و n مجهول** داریم که با $n = ۲$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۱x + ۲y &= ۳ \qquad \textbf{دو معادله} \\ ۴x + ۵y &= ۶. \qquad \textbf{دو مجهول} \end{aligned}$$

x و y مجهولات هستند. می‌خواهم دو روش را برای حل این دستگاه توضیح دهم، روش حذفی و روش دترمینان. مسلماً x و y توسط اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ مشخص می‌شوند. مسأله این است که از این اعداد چگونه برای حل دستگاه معادلات استفاده کنیم.

۱. روش حذفی چهار برابر اولین معادله را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم. در این صورت x از معادلهٔ دوم حذف می‌شود و تنها یک معادله برحسب y بدست می‌آید:

$$-۳y = -۶. \qquad \textbf{(معادله ۲)}-۴\textbf{(معادله ۱)}$$

بنابراین می‌دانیم $y = ۲$. آنگاه x را می‌توان از معادلهٔ $۱x + ۲y = ۳$ بدست آورد:

$$\textbf{باز-جانشانی} \quad ۱x + ۲(۲) = ۳ \Rightarrow x = -۱.$$

باید بررسی کنیم که این مقادیر x و y در معادلهٔ دوم نیز صدق می‌کنند. این روش باید مؤثر باشد که هست:

$$۴(x = -۱) + ۵(y = ۲) = ۶.$$

۲. دترمینان جواب $y = ۲$ کاملاً به شش عدد ظاهر شده در معادلات بستگی دارد. باید فرمولی برای y (و برای x) وجود داشته باشد. این فرمول به صورت «کسری از دترمینان» است و امیدوارم اجازه بدهید مستقیماً آن را بنویسم:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}} = \frac{۱ \times ۶ - ۳ \times ۴}{۱ \times ۵ - ۲ \times ۴} = \frac{-۶}{-۳} = ۲.$$

این موضوع کمی عجیب به نظر می‌رسد مگر اینکه دترمینان ۲ در ۲ را بدانید. این فرمول همان جواب $y = ۲$ را بدست می‌دهد که از همان تقسیم ۶− بر ۳− حاصل می‌شود. اگر قرار باشد با دترمینانها ادامه دهیم (که در اینجا قصد آن را نداریم)، فرمول مشابهی برای محاسبهٔ مجهول x وجود دارد:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}} = \frac{۳ \times ۵ - ۲ \times ۶}{۱ \times ۵ - ۲ \times ۴} = \frac{۳}{-۳} = -۱.$$

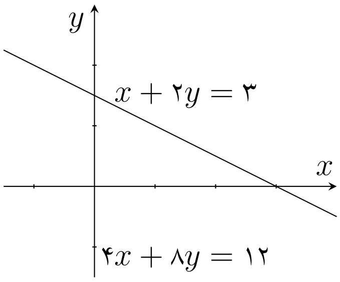
اجازه دهید این دو روش را مقایسه کنم، با این فرض که n عدد خیلی بزرگتری است ($n = ۱۰۰۰$ یک مقدار خیلی متوسط در محاسبات علمی است). حقیقت این است که استفاده مستقیم از دترمینان برای ۱۰۰۰ معادله یک مصیبت کامل است. این روش قادر به کار با میلیونها عدد ظاهر شده در سمت چپ فرمول را دارد ولی نه به شکل بهینه. این فرمول را (با نام قاعدهٔ کرامر) در فصل ۴ خواهیم دید، اما در فصل ۱ به دنبال روشی مناسب برای حل ۱۰۰۰ معادله هستیم.

این روش مناسب **روش حذفی گاوس** نام دارد. این روش الگوریتمی است که همواره برای حل دستگاههای بزرگ معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مثالهای یک کتاب درسی ($n = ۳$ نهایت صبر نویسنده و خواننده است) ممکن است تفاوتی مشاهده نکنید. معادلات (۲) و (۴) اساساً گامهای یکسانی برای یافتن $y = ۲$ به‌کار می‌برند. مطمئناً محاسبهٔ x با استفاده از باز-جانشانی معادلهٔ (۳) سریعتر از محاسبهٔ کسر در معادلهٔ (۵) بدست می‌آید. برای nهای بزرگتر هیچ سؤالی وجود ندارد. روش حذفی موفقتر است (و این روش حتی بهترین روش محاسبهٔ دترمینان است).

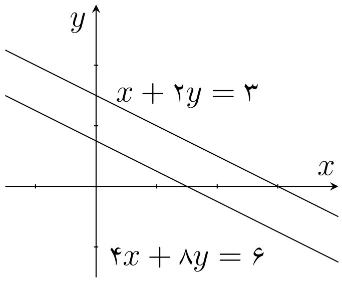
ایدهٔ روش حذفی بسیار ساده است — بعد از چند مثال در آن تبحر پیدا می‌کنید. این روش پایه‌ای برای نصف این کتاب خواهد بود که با استفاده از آن یک ماتریس را ساده می‌کنیم تا فهم آن راحت‌تر شود. به‌همراه فرایند الگوریتم می‌خواهیم چهار جنبهٔ عمیق را در این فصل شرح دهیم. این چهار جنبه عبارتند از:

۱. معادلات خطی ما را به **هندسهٔ مسطحه** راهنمایی می‌کند. تصور یک صفحهٔ ۹ بعدی در یک فضای ۱۰ بعدی آسان نیست. سخت‌تر از آن این است که تقاطع ۱۰ تا از این صفحات را تصور کنیم که جواب ۱۰

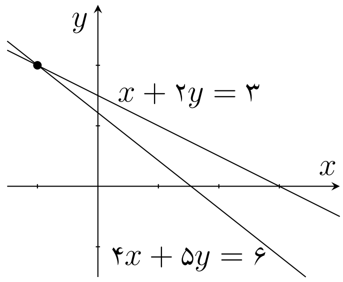
معادله است — اما به‌طریقی این کار تقریباً امکان‌پذیر است. مثال ما در شکل ۱.۱ دارای دو خط است که در نقطهٔ $(x,y)=(-۱,۲)$ همدیگر را قطع می‌کنند. جبرخطی این شکل را به بعد ۱۰ می‌برد، جایی که هندسه را باید تصور کرد (و این کار را درست انجام می‌دهد).



(آ) **تمام خط جواب**



(ب) **موازی: بدون جواب**



(پ) **جواب** $(x,y)=(-۱,۲)$

شکل ۱.۱: مثال مطرح شده دارای یک جواب است. حالات تکین بدون جواب یا بینهایت جواب دارند.

۲. به **نمادگذاری ماتریسی** خودمان را منتقل می‌کنیم و n مجهول را به صورت بردار x، و n معادله را به شکل $Ax=b$ نمایش می‌دهیم. ماتریس A را در «ماتریس حذفی» ضرب می‌کنیم تا به یک ماتریس بالامثلثی U برسیم. این گام‌ها A را به شکل $L\times U$ تبدیل می‌کند، که L پایین‌مثلثی است. به عنوان مثال، A و تجزیهٔ آن را برای مثال مورد بحث می‌نویسم، و در زمان مناسب آنها را توضیح می‌دهم:

$$\textbf{تجزیه}\quad A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}=\mathbf{L}\times\mathbf{U}$$

ابتدا باید ماتریسها و بردارها و قاعدهٔ ضرب را معرفی کنیم. هر ماتریس دارای **ترانهادهٔ** $\boldsymbol{A^T}$ است. این ماتریس دارای **وارون** $\boldsymbol{A^{-۱}}$ است.

۳. روش حذفی در بیشتر حالات بدون دردسری پیش می‌رود. در حالات خاصی ممکن است روش متوقف

شود — یا معادلات به ترتیب نادرست نوشته شده‌اند، که با یک جابجایی برطرف می‌شود، یا اینکه معادلات دارای جواب یکتا نیستند.

در مثال مورد بحث اگر ۸ را به‌جای ۵ قرار دهیم **حالت تکین** اتفاق می‌افتد:

$$\begin{aligned} ۱x + ۲y &= ۳ \quad \textbf{حالت تکین} \\ ۴x + ۸y &= ۶. \quad \textbf{دو خط موازی} \end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

روش حذفی بازهم ۴ برابر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم می‌کند. اما به حاصل نگاه کنید:

$$\textbf{(معادله ۲)} - ۴ \textbf{(معادله ۱)} \quad ۰ = -۶.$$

این حالت خاص **بدون جواب** است. حالات تکین دیگر دارای **بی‌نهایت جواب** هستند. (در مثال مورد بحث، ۶ را به ۱۲ تبدیل کنید، که در این صورت روش حذفی به عبارت $۰ = ۰$ می‌رسد. حال y می‌تواند هر مقداری باشد.) وقتی روند حذف متوقف می‌شود، مایل هستیم که تمام جوابهای ممکن را پیدا کنیم.

۴. می‌خواهیم بدانیم **تعداد گامهای روش حذفی** مورد نیاز برای یافتن جوابهای یک دستگاه از اندازهٔ n حدوداً چقدر است. هزینهٔ محاسبه اغلب دقت را در نمونه نشان می‌دهد. صد معادله نیاز به میلیونها گام دارد (ضرب و تفریق). یک رایانه به‌سرعت قادر به انجام چنین کاری است، اما برای میلیاردها گام نمی‌تواند سریعاً محاسبات را انجام دهد. همچنین، بعد از میلیونها گام، خطای گردکردن اعداد در محاسبات غیرقابل چشم‌پوشی خواهد شد. (بعضی از مسائل حساس هستند و بعضی دیگر نیستند). بدون قصد ارائهٔ کامل جزئیات، می‌خواهیم دستگاه‌های بزرگ که در عمل ظاهر می‌شوند و روش واقعی یافتن جواب آنها را ببینیم.

آخرین نتیجهٔ این فصل ارائهٔ یک الگوریتم حذفی است که تا جای ممکن بهینه است. این الگوریتم در حقیقت همانی است که به‌طور ثابت در بسیاری از کاربردها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در همین حال، دانستن این الگوریتم برپایهٔ ماتریسها — ماتریس ضرایب A، ماتریس E برای حذف و P برای تعویض سطرها، و عامل نهایی L و U — پایهٔ اصلی نظریه هستند. امیدوارم که از این کتاب و این درس لذت ببرید.

۲.۱ هندسهٔ معادلات خطی

روش فهمیدن این موضوع استفاده از مثال است. با دو مثال بسیار ساده شروع می‌کنیم که، حتی بدون گذراندن درسی در جبرخطی، می‌توانید جواب آنها را بیابید. با این حال امیدوارم روش حذفی گاوس را بکار ببرید:

$$\begin{aligned} ۲x - y &= ۱ \\ x + ۱۰y &= ۵. \end{aligned}$$

می‌توانیم به دستگاه سطری یا ستونی نگاه کنیم. می‌خواهیم هر دو دیدگاه را بررسی کنیم.

اولین دیدگاه روی هر کدام از معادلات (**سطرها**) جداگانه تمرکز می‌کند. این روش آشناترین روش است و در بعد ۲ می‌توانیم به سرعت آن را انجام دهیم. معادلهٔ $۲x - y = ۱$ توسط یک خط راست در صفحهٔ $x - y$ نمایش داده می‌شود. این خط از نقاط $x = ۱, y = ۱$ و $x = ۱/۲, y = ۰$ می‌گذرد (و همچنین از نقطهٔ $(۲,۳)$ و تمام نقاط بینابینی). معادلهٔ دوم $x + y = ۵$ خط دیگری را نمایش می‌دهد (شکل ؟؟). شیب این خط برابر است با $dy/dx = -۱$ و این خط با خط اول در نقطهٔ جواب متقاطع است.

نقطهٔ تقاطع در هر دو خط مشترک است و بنابراین تنها جواب مشترک هر دو معادله است. این نقطهٔ $x = ۲, y = ۳$ به‌زودی با «روش حذفی» بدست می‌آید.

تصویر اینجا

دیدگاه دوم به **ستونهای** دستگاه خطی توجه دارد. دو معادلهٔ خطی در حقیقت **معادلهٔ برداری** هستند:

$$x\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-۱\\۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱\\۵\end{bmatrix}. \qquad \textbf{شکل ستونی}$$

مسأله **یافتن ترکیبی از دو بردار ستونی سمت چپ است که بردار سمت راست را تولید کند.** دو بردار $(۲,۱)$ و $(-۱,۱)$ به صورت خطهای سیاه در شکل ؟؟ نمایش داده شده‌اند. مجهولات همان اعداد x و y هستند که به صورت ضرایب بردارهای ستونی پدیدار شده‌اند. تمام ایده را می‌توان در شکل مورد اشاره دید، که در آنجا ۲ برابر ستون اول به ۳ برابر ستون دوم افزوده شده است. به صورت هندسی این کار یک متوازی‌الاضلاع معروف را ترسیم می‌کند. به صورت جبری این کار بردار $(۱,۵)$ را در سمت راست معادلهٔ مورد بحث تشکیل می‌دهد. نمایش ستونی تأیید می‌کند که $x = ۲$ و $y = ۳$.

زمان بیشتری را می‌توان روی مثال صرف کرد، اما ترجیح می‌دهم که به حالت $n = ۳$ بروم. سه معادله را همچنان می‌توان مدیریت کرد، و گوناگونی بیشتری در کیفیت جواب آنها وجود دارد:

$$\begin{aligned} ۲u + v + w &= ۵ \\ ۴u - ۶v \qquad &= -۲ \\ -۲u + ۷v + ۲w &= ۹ \end{aligned} \qquad \textbf{سه صفحه} \qquad (۱)$$

دوباره می‌توانیم سطرها یا ستونها را مورد بررسی قرار دهیم،که ابتدا با سطرها شروع می‌کنیم. هر معادله یک **صفحه** را در فضای سه بعدی نمایندگی می‌کند. اولین صفحه عبارت است از $۲u + v + w = ۵$، که در شکل ۳.۱ رسم شده است. این صفحه شامل نقاط $(\frac{۵}{۲},۰,۰)$ و $(۰,۵,۰)$ و $(۰,۰,۵)$ است. این صفحه با سه نقطهٔ دلخواهش کاملاً مشخص می‌شود—به شرط اینکه این نقاط روی یک خط قرار نداشته باشند.

۵ را به ۱۰ تبدیل کنید، صفحهٔ $۲u + v + w = ۱۰$ موازی با صفحهٔ قبلی است. این صفحهٔ جدید شامل نقاط $(۵,۰,۰)$ و $(۰,۱۰,۰)$ و $(۰,۰,۱۰)$ است که دو برابر دورتر از مبدأ (نقطهٔ $u = ۰, v = ۰, w = ۰$)

هستند. تغییر سمت راست، صفحه را به موازات خود انتقال می‌دهد، و صفحهٔ $۲u + v + w = ۰$ از مبدأ عبور می‌کند.

صفحهٔ دوم $۴u - ۶v = -۲$ است. این صفحه به صورت عمودی ترسیم شده است، زیرا w می‌تواند هر مقداری را بپذیرد. ضریب w صفر است، اما باز هم این معادلهٔ صفحه‌ای در فضا است. (معادلهٔ $۴u = ۳$، یا حتی معادلهٔ $u = ۰$، یک صفحه را مشخص می‌کند.) تقاطع صفحهٔ اول با صفحهٔ دوم در شکل نمایش داده شده است. اشتراک یک خط است. در بعد سه، نمایش هر خط نیاز به دو معادله دارد؛ در بعد n این نمایش خط نیاز به $n - ۱$ معادله دارد.

در نهایت، صفحهٔ سوم، خط را در یک نقطه قطع می‌کند. صفحه‌ای که نمایندهٔ معادلهٔ $-۲u + ۷v + ۲w = ۹$ است (که در شکل رسم نشده است) خط را در نقطهٔ $u = ۱, v = ۱, w = ۲$ قطع می‌کند. نقطهٔ تقاطع $(۱, ۱, ۲)$ جواب دستگاه خطی است.

این شکل سطری چگونه به بعد n گسترش می‌یابد؟ n معادله دارای n مجهول هستند. اولین معادله همچنان یک «صفحه» را مشخص می‌کند. این صفحه دیگر صفحه‌ای ۲-بعدی در فضای ۳-بعدی نیست، به طریقی دارای «بعد» $n - ۱$ است. این صفحه باید در فضای n-بعدی مسطح و به شدت نازک باشد، با این وجود باید به نظر ما دارای حجم باشد.

اگر بعد چهارم را زمان در نظر بگیریم، آنگاه صفحهٔ $t = ۰$ فضای ۴-بعدی را در جهان ۳-بعدی می‌برد که در آن زندگی می‌کنیم (جهان در زمان $t = ۰$). یک صفحهٔ دیگر عبارت است از $z = ۰$، که آن هم ۳-بعدی است که همان صفحهٔ معمولی $x - y$ است که در تمام زمانها در نظر گرفته می‌شود. این دو صفحهٔ ۳-بعدی همدیگر را قطع می‌کنند! اشتراک آنها همان صفحهٔ عادی $x - y$ در زمان $t = ۰$ است. به بعد ۲ رسیدیم، و صفحهٔ بعدی یک خط را جدا می‌کند. در نهایت، صفحهٔ چهارم تنها یک نقطه را جدا می‌کند. این نقطه، اشتراک ۴ صفحه در بعد ۴ است، و جواب دستگاه ۴-معادله‌ای زمینه است.

اگر این مثال به نسبت پیش برود به مشکل برمی‌خورم. نکته این است که جبر خطی توانایی کار با هر تعداد از معادلات را دارد. معادلهٔ اول یک صفحهٔ $n - ۱$-بعدی را در فضای n-بعدی تولید می‌کند. معادلهٔ دوم این صفحه را در یک مجموعهٔ کوچکتر از «بعد $n - ۲$» قطع می‌کند (امیدواریم). با فرض اینکه همه چیز به خوبی پیش برود، هر صفحهٔ جدید (هر معادلهٔ جدید) بعد را یک عدد کاهش می‌دهد. در نهایت، وقتی همهٔ n صفحه‌ها مورد محاسبه قرار گرفتند، اشتراک دارای بعد صفر است. این اشتراک از بعد صفر یک نقطه است، که روی تمام صفحات قرار دارد و مختصاتش در معادلات تمام n صفحه صدق می‌کند. این نقطه جواب دستگاه است!

بردارهای ستونی و ترکیب خطی

به ستونها برمی‌گردیم. در این حالت، معادلهٔ برداری (همان معادلهٔ (۱)) عبارت است از:

$$\textbf{شکل ستونی} \qquad u\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ -۲ \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} ۱ \\ -۶ \\ ۷ \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix} = b.$$

اینها بردارهای ستونی ۳-بعدی هستند. **بردار b با نقطهٔ به مختصات ۹ ,۲− ,۵ یکسان گرفته می‌شود.** هر نقطه در فضای ۳-بعدی با یک بردار در تناظر است و برعکس. این ایدهٔ دکارت است که به واسطهٔ کار با مؤلفه‌های نقاط، هندسه را به جبر متصل می‌کند. می‌توانیم بردارها را به صورت ستونی نمایش بدهیم یا اینکه مؤلفه‌های آنها را به صورت مثلاً $b = (۵, -۲, ۹)$ لیست کنیم، یا اینکه می‌توانیم بردارها را به صورت پیکانهای خارج شده از مبدأ نمایش دهیم. می‌توانید پیکان، یا نقطه و یا سه‌تایی اعداد را انتخاب کنید. در بعد ۶ شاید بهتر ساده‌تر باشد که شش‌تایی اعداد را انتخاب کنیم.

وقتی که بردارهای را سطری می‌نویسیم، از پرانتز و کاما برای جداسازی مؤلفه‌ها استفاده می‌کنیم؛ و وقتی آنها را به صورت عمودی نمایش می‌دهیم، از کروشه (بدون استفاده از کاما) استفاده می‌کنیم. چیزی که مهم است **جمع بردارها** و ضرب در اسکالر (یک عدد) است. در شکل ۲.۱(آ) یک جمع برداری را مشاهده می‌کنید، مؤلفه به مؤلفه:

$$\textbf{جمع برداری} \qquad \begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix}.$$

در شکل سمت راست، ضرب در ۲ وجود دارد (و اگر این ضرب در ۲− بود، بردار در جهت عکس پیش می‌رفت):

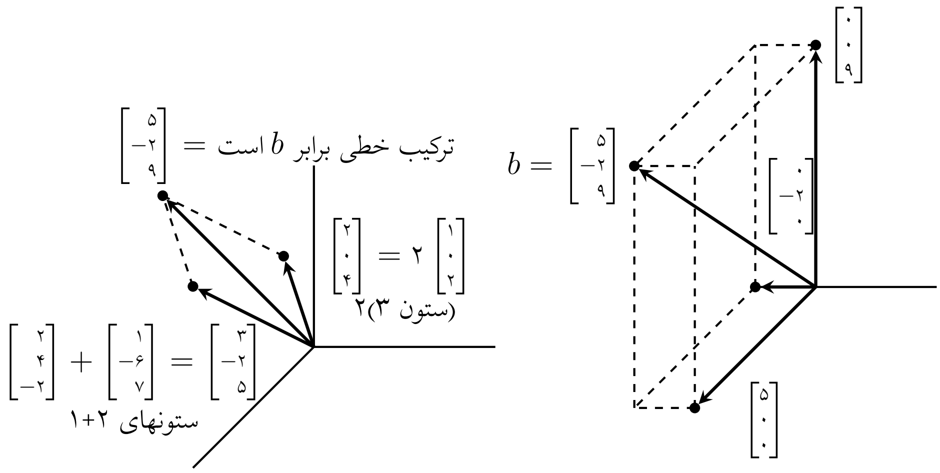
$$\textbf{ضرب در اسکالر} \qquad ۲\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} \qquad -۲\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}.$$

همچنین در شکل سمت راست یکی از ایده‌های اساسی جبر خطی نهفته است. در این شکل هر دو عمل ابتدایی وجود دارد: بردارها ابتدا ضرب در عدد و سپس جمع شده‌اند. حاصل را یک **ترکیب خطی** می‌نامند و این ترکیب جواب معادله است:

$$\textbf{ترکیب خطی} \qquad ۱\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ -۲ \end{bmatrix} + ۱\begin{bmatrix} ۱ \\ -۶ \\ ۷ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \\ ۹ \end{bmatrix}.$$

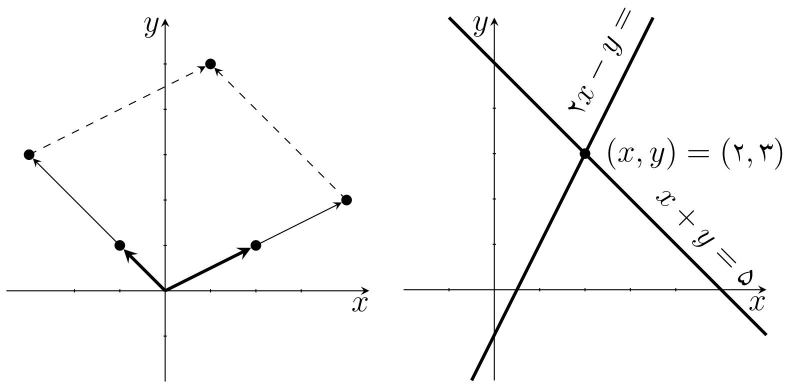
معادلهٔ (۲) به دنبال ضرایب u، v، w است که بردار b را در سمت راست تولید کنند. این اعداد عبارتند از $u = ۱$، $v = ۱$، $w = ۲$. این اعداد ترکیب درست ستونها را بدست می‌دهند. این اعداد همچنین نقطهٔ $(۱, ۱, ۲)$ را در شکل سطری (که هر سه صفحه در آن همدیگر را قطع می‌کنند) بدست می‌دهند.

هدف واقعی ما گذر از بعد ۲ و ۳ به سمت بعد n است. با n معادله بر حسب n مجهول، n صفحه در شکل سطری وجود خواهد داشت. همچنین n بردار در شکل ستونی به همراه یک بردار b در سمت راست



(ب) **جمع ستونهای ۲+۱+(۳+۳)** (آ) **جمع بردارها در امتداد محورها**

شکل ۲.۱: تصویر ستونی: ترکیب خطی ستونها برابر b است.



(ب) **ترکیب خطی ستونها با نسبتهای ۲ و ۳** (آ) **تقاطع خطها در $\mathbf{x} = ۲$ و $\mathbf{y} = ۳$**

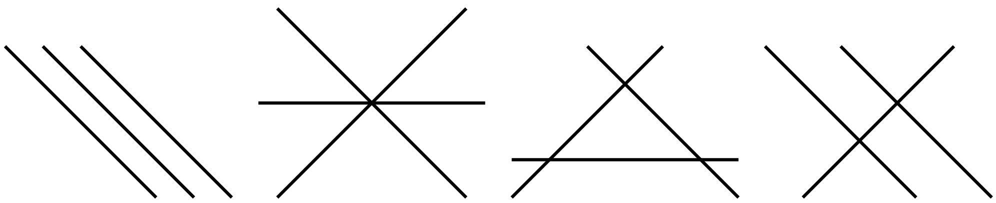
شکل ۳.۱: شکل سطری (دو خط) و شکل ستونی (ترکیب ستونها)

وجود دارد. معادلات به دنبال یک **ترکیب خطی از $\mathbf{n}$ ستون است تا $\mathbf{b}$ بدست آید.** برای برخی از معادلات این کار امکان‌پذیر نیست. روش مناسب فهمیدن این مطلب مطالعهٔ بدترین حالت ممکن است. بنابراین، در **حالت تکین**، وقتی که ترکیب خطی مورد نظر وجود ندارد، به شکل هندسی دقیقتر نگاه می‌کنیم.

شکل سطری: تقاطع صفحات	**شکل ستونی: ترکیب ستونها**

حالت تکین

فرض کنید همچنان در بعد ۳ هستیم، و سه صفحهٔ تصویر سطری متقاطع نیستند. چه مشکلی ممکن است پدیدار شود؟ یکی می‌تواند این باشد که دو تا از صفحه‌ها موازی باشند. معادلات $۲u + v + w = ۵$ و $۴u + ۲v + ۲w = ۱۱$ ناسازگار هستند—و صفحات موازی جوابی بدست نمی‌دهند (شکل ۴.۱(آ) تصویر صفحات را از فاصلهٔ دور ارائه می‌کند). در بعد ۲، دو خط موازی تنها حالت عدم وجود جواب است. اما سه صفحه در بعد سه می‌توانند دارای مشکل باشند حتی اگر موازی نباشند.



(آ) دو صفحهٔ موازی (ب) بدون اشتراک (پ) یک خط اشتراک (ت) تمام صفحات موازی

شکل ۴.۱: حالات تکین: موارد (آ)، (ب)، یا (ت) بدون جواب، حالت (پ) بی‌نهایت جواب

مهمترین مشکل در حالتی پدیدار می‌شود که در شکل ۴.۱(ب) نمایش داده شده است. از نقطهٔ دید دور، سه صفحه تشکیل یک مثلث می‌دهند. هر دو صفحه در یک خط همدیگر را قطع می‌کنند، و این خطهای بدست آمده موازی هستند. هیچ صفحه‌ای موازی دو صفحهٔ دیگر نیست، اما موازی خط حاصل از اشتراک این دو صفحه است. این حالت متناظر با حالت تکین زیر است (با $b = (۲, ۵, ۶)$):

$$\begin{aligned} u+v+\ w &= ۲ \\ ۲u \quad +۳w &= ۵ \\ ۳u+v+۴w &= ۶. \end{aligned} \qquad \textbf{بدون جواب، همانند شکل ۴.۱(ب)} \qquad (۳)$$

طرف چپ معادلهٔ سوم برابر با حاصل جمع دو طرف چپ معادلات اول و دوم است. این روند در طرف راست اتفاق نمی‌افتد : $۶ \neq ۵ + ۲$. معادلهٔ ۱ به اضافهٔ معادلهٔ ۲ منهای معادلهٔ ۳ به گزارهٔ نادرست $۱ = ۰$ تبدیل می‌شود. بنابراین معادلات **ناسازگار** هستند، و این موضوع را روش حذفی گاوس به طور سازمان‌یافته شناسایی می‌کند.

دستگاه تکین دیگر، که بسیار شبیه قبلی است، دارای **بی‌نهایت جواب** است. وقتی که در معادلهٔ آخر ۶ را به ۷ تبدیل کنیم، هر سه معادله ترکیب می‌شوند و عبارت $۰ = ۰$ را بدست می‌دهند. در اینجا معادلهٔ سوم برابر با حاصل جمع معادلات اول و دوم است. در این حالت، هر سه خط در یک خط مشترکند (شکل ۴.۱(پ)). تغییر سمت راست هرکدام از معادلات باعث می‌شود که صفحهٔ متناظر با آن معادله به موازات خودش تغییر مکان دهد.، و برای $b = (۲, ۵, ۷)$ ناگهان شکل کاملاً متفاوت می‌شود. صفحهٔ زیرین به سمت بالا حرکت می‌کند تا نهایتاً دوتای دیگر را قطع کند، و یک خط جواب بدست می‌آید. مسألهٔ ۴.۱(پ) هم تکین است، اما این بار از **زیادی جواب** رنج می‌برد تا کمی جواب.

نمایه

واژه‌نامه

تابع ترکیب	Composition function
تکنیک علامت	Sign trick
دومجتمع	Bicomplex
رسته	Category
ریخت	Morphism
ریخت همانی	Identity morphism
سازه	Construction
شیئ	Object
مانستگی سادکی	Simplicial homology
مجتمع تام	Total complex
مجتمع مضاعف	Double complex
هسته	Kernel
هم‌هسته	Cokernel
Ab-رسته	**Ab**-category