دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته آمار

عنوان:

برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم‌یافته

نگارش:
سید علی رکابدار

اساتید راهنما:
دکتر مینا امین غفاری

استاد مشاور:
دکتر اسماعیل خرم

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

قدردانی

نگارنده برخود لازم می‌داند که از زحمات ارزشمند استاد گرامی خانم دکتر مینا امین غفاری و راهنمایی‌های بی دریغ جناب آقای دکتر عادل محمد پور در راستای انجام این پروژه و همچنین استاد مشاور جناب آقای دکتر اسماعیل خرم، تشکر و قدردانی نماید.

چکیده

توزیع نمایی دو پارامتری یا توزیع نمایی تعمیم‌یافته از خانواده توزیع وایبل نمایی می‌باشد. توزیع نمایی تعمیم‌یافته مانند توزیع گاما و وایبل، تابع چگالی تک‌مدی چوله به راست و تابع مخاطره یکنوا دارد. به طور مؤثر از این توزیع به‌جای توزیع گاما و وایبل برای بررسی داده‌های وابسته به زمان یا داده‌های چوله می‌توان استفاده کرد. در این پایان‌نامه ابتدا چگونگی پیدایش و ویژگی‌های توزیع نمایی تعمیم‌یافته بیان شده است. سپس روش‌های کلاسیک برای برآورد پارامترهای این توزیع بررسی شده است. در آخر برآوردگر بیز پارامترهای نامعلوم معرفی شده‌است. به دلیل این‌که برآوردگر بیز به صورت تحلیلی محاسبه نمی‌شود، از تقریب لیندلی و نمونه‌گیری گیبس برای تقریب آن استفاده شده‌است. برآوردگر بیزی که به‌دست آمده است، با برآوردگر ماکزیمم درستنمایی مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: توزیع نمایی تعمیم یافته، روش برآوردگر گشتاوری، برآوردگر کمترین مربعات، برآوردگر کمترین مربعات وزن‌دار، برآوردگر صدکی، برآوردگر L-گشتاوری، برآوردگر بیز، تابع زیان مربع خطا، برآوردگر ماکزیمم درستنمایی.

فهرست مطالب

مقدمه

تابع توزیع تجمعی در نیمه اول قرن نوزدهم توسط گومپرتز[1] [۵]، و ورهالست[2] [۲۷, ۲۸, ۲۹]، برای مقایسه‌ی جداول مرگ و میر استفاده شد که یکی از این توابع توزیع بصورت زیر می‌باشد:

$$G(t) = (۱ - \rho e^{-t\lambda})^{\alpha} \quad t > \frac{۱}{\lambda} \ln \rho$$

که ρ، λ و α اعداد حقیقی و مثبت می‌باشند. در قرن بیستم آهوجا[3] و ناش[4] [۱]، از مدل بالا استفاده کردند و آن را بیشتر تعمیم دادند. توزیع نمایی تعمیم یافته[5] یا توزیع نمایی توانی[6] به‌عنوان حالت خاصی از تابع توزیع گومپرتز و ورهالست با $\rho = ۱$ می‌باشد. بنابراین X یک متغیر تصادفی نمایی تعمیم یافته دو پارامتری است اگر دارای تابع توزیع زیر باشد:

$$GE(\alpha, \lambda) = F_X(x; \alpha, \lambda) = (۱ - e^{-\lambda x})^{\alpha} \quad x > ۰, \ \alpha, \lambda > ۰$$

که α و λ به‌ترتیب پارامترهای شکل[7] و مقیاس[8] می‌باشند.

توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری متعلق به خانواده توزیع وایبل توانی سه پارامتری است،که توسط مدهلکار[9] و سرویستاوا[10] [۲۰]، مطرح شده است. همچنین توزیع وایبل

---

[1] Gompertz

[2] Verhoulst

[3] Ahuja

[4] Nash

[5] Generalized Exponential Distribution

[6] Exponentiated Exponential

[7] Shape

[8] Scale

[9] Mudholkar

[10] Sirvastava

توانی نمونه‌ی خاصی از کلاس توزیع‌های توانی است که بوسیله گوپتا[11] و سایرین [۶]، بصورت $F(t)=[G(t)]^{\alpha}$، بدست آمده است که $G(t)$ تابع توزیع پایه است.

همچنین نشان داده شده است که از توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری بطور کاملاً مؤثر برای تحلیل داده‌های مثبت وابسته به زمان (عمر) بجای توزیع گامای دوپارامتری یا توزیع وایبل دو پارامتری استفاده می‌شود[۷].

زمانی‌که پارامتر شکل در توزیع نمایی تعمیم یافته یعنی α برابر یک باشد، این توزیع با توزیع نمایی یک پارامتری منطبق می‌باشد. توزیع گاما و توزیع وایبل بسط‌ها یا تعمیم‌های توزیع نمایی یک پارامتری به روش‌های مختلف می‌باشند.

توزیع نمایی تعمیم یافته تعبیر فیزیکی خوبی دارد. یک سیستم موازی[12] شامل n مؤلفه در نظر بگیرید، سیستم کار می‌کند تا زمانی که یک مولفه از این n مؤلفه کار کند. اگر عمر این n مؤلفه متغیرهای تصادفی نمایی مستقل و هم‌توزیع باشد، در این صورت تابع توزیع عمر سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$F(x;n,\lambda)=(۱-e^{-\lambda x})^{n} \quad x>۰$$

که $\lambda>۰$ می‌باشد. بوضوح تابع بالا تابع توزیع نمایی تعیم یافته با پارامتر شکل $\alpha=n$ می‌باشد. متغیر تصادفی نمایی تعمیم یافته به آسانی از یک تابع توزیع یکنواخت بدست می‌آیند. برای مثال، اگر U یک متغیر تصادفی یکنواخت از $[۰,۱]$ باشد، در این صورت $X=-\frac{۱}{\lambda}\ln(۱-U^{\frac{۱}{\alpha}})$ دارای توزیع نمایی تعمیم‌یافته می‌باشد. اخیراً همه ماشین‌حساب‌های علمی یا کامپیوترها قادر به تولید اعداد تصادفی یکنواخت از بازه $[۰,۱]$ می‌باشند، بنابراین اعداد تصادفی نمایی تعمیم یافته به آسانی از یک رشته اعداد تصادفی یکنواخت قابل تولید می‌باشند.

این توزیع خاص چندین مزیت دارد که برای تحلیل داده‌های عمر و چوله از آن استفاده می‌شود.

در فصل اول ویژگی‌های مختلف این توزیع توضیح داده شده است و در فصل دوم برآوردگرهای کلاسیکی برای پارامترهای آن مطرح شده است. در فصل ۳ برآوردگرهای بیز پارامترهای آن و تقریب این برآوردگرها آورده شده است.

---

[11] Gupta

[12] Parallel

فصل ۱

توزیع نمایی تعمیم‌یافته

۱.۱ تابع چگالی و ویژگی‌های گشتاوری

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع نمایی تعمیم‌یافته باشد، در این صورت تابع چگالی آن به صورت

$$f(x;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x} \quad x>0 \tag{1.1.1}$$

می‌باشد که $\alpha,\lambda>0$ می‌باشند. درشکل ۱-۱ نمودار تابع چگالی نمایی تعمیم یافته برای مقادیر مختلف α و $\lambda=1$ رسم شده است. تابع چگالی نمایی تعمیم یافته شکل‌های مختلفی دارد. برای $\alpha\leq 1$، یک تابع نزولی و برای $\alpha>1$ تک مدی، چوله و مانند تابع چگالی گاما و وایبل دم آن به راست کشیده شده است. مشاهده می‌شود که برای مقادیر خیلی بزرگ پارامتر شکل همیشه غیر متقارن می‌باشد. اگر $\lambda=1$ باشد برای $\alpha>1$ مد آن در $\ln\alpha$، و برای $\alpha\leq 1$ مد آن در صفر می‌باشد. و میانه برابر $-\ln(1-(0/5)^{\frac{1}{\alpha}})$ می‌باشد. میانگین، میانه و مد توابع غیرخطی از پارامتر شکل می‌باشند و زمانی که پارامتر شکل به بینهایت میل می‌کند همه آنها به یک مقدار نامتناهی میل می‌کنند. برای مقادیر بزرگ α، میانگین، میانه و مد تقریباً برابر $\ln\alpha$ هستند. گشتاورهای مختلف توزیع نمایی تعمیم یافته از تابع مولد گشتاور بدست می‌آیند. اگر X دارای توزیع $GE(\alpha,\lambda)$ باشد، در این‌صورت تابع مولد

شکل ۱.۱ تابع چگالی نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری برای αهای مختلف.

گشتاور یعنی $M_X(t)$ به‌ازای $t<\lambda$، بصورت زیر است:

$$M_X(t)=Ee^{tX}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\alpha-\frac{t}{\lambda}+1)} \quad (۲.۱.۱)$$

برای $t>\lambda$ صفر و در $t=\lambda$ برابر $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$ می باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}[\psi(\alpha+1)-\psi(1)] \quad (۳.۱.۱)$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}[\psi'(1)-\psi'(\alpha+1)] \quad (۴.۱.۱)$$

که $\psi(.)=\frac{\acute{\Gamma}(.)}{\Gamma(.)}$ و مشتق‌های آن توابع دایگاما[۱] و پلی‌گاما[۲] هستند. میانگین این توزیع برای λ ثابت و α بزرگ به بینهایت میل می‌کند. زمانی‌که α خیلی افزایش می‌یابد، برای λ ثابت واریانس هم زیاد می‌شود و به‌سمت $\frac{\pi^2}{6\lambda}$ افزایش می‌یابد. این ویژگی در توزیع گاما و وایبل کاملاً متفاوت است. در توزیع گاما، زمانی‌که پارامتر شکل افزایش می‌یابد واریانس به بینهایت میل می‌کند، درحالیکه در توزیع وایبل برای مقادیر بزرگ پارامتر شکل α، واریانس تقریباً برابر $\frac{\pi^2}{6\lambda\alpha^2}$ می‌باشد.

چولگی و کشیدگی این توزیع بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad , \quad \sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} \quad (۵.۱.۱)$$

که μ_2، μ_3 و μ_4 بترتیب گشتاورهای دوم، سوم و چهارم هستند که برحسب توابع یا چند جمله‌ای‌های دایگاما و پلی‌گاما بدست می‌آیند[۱۰].

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{1}{\lambda^2}[\psi'(1)-\psi'(\alpha+1)+(\psi(\alpha+1)-\psi(1))^2]\\
\mu_3 &= \frac{1}{\lambda^3}[\psi''(\alpha+1)-\psi''(1)+3(\psi(\alpha+1)-\psi(1))(\psi'(1)-\psi'(\alpha+1))+(\psi(\alpha+1)-\psi(1))^3]\\
\mu_4 &= \frac{1}{\lambda^4}[\psi'''(1)-\psi'''(\alpha+1)+3(\psi'(1)-\psi'(\alpha+1))^2+4(\psi(\alpha+1)-\psi(1))\\
&\quad \times(\psi''(\alpha+1)-\psi''(1))+6(\psi(\alpha+1)-\psi(1))^2\\
&\quad \times(\psi'(1)-\psi'(\alpha+1))+(\psi'''(1)-\psi'''(\alpha+1))^4]
\end{aligned}$$

چولگی و کشیدگی هر دو مستقل از پارامتر مقیاس می‌باشند. بصورت عددی نشان داده شده است که چولگی و کشیدگی توابعی کاهشی از α می‌باشند و مقدار حدی چولگی تقریباً

[۱] Diagamma

[۲] Polygamma

شکل ۲.۱: تابع مخاطره توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری برای αهای مختلف.

شکل ۳.۱: تابع عکس مخاطره توزیع نمایی تعمیم‌یافته دو پارامتری برای αهای مختلف

۱۳۹۵۴۷/۱ می‌باشد.

۲.۱ تابع مخاطره و عکس تابع مخاطره

تابع مخاطره توزیع نمایی تعمیم یافته بصورت زیر تعریف می‌شود

$$h(x;\alpha,\lambda)=\frac{f(x;\alpha,\lambda)}{1-F(x;\alpha,\lambda)}=\frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} \qquad (۶.۲.۱)$$

از آنجایی که λ پارامتر مقیاس می‌باشد، شکل تابع مخاطره به λ وابسته نیست و فقط به α وابسته است.

برای مقادیر ثابت λ و $\alpha > 1$، توزیع نمایی تعمیم یافته تابع مخاطره صعودی دارد و برای مقادیر ثابت λ و $\alpha < 1$، تابع مخاطره نزولی دارد.

برای $\alpha = 1$، تابع مخاطره آن ثابت می‌باشد. تابع عکس مخاطره برای توزیع نمایی تعمیم یافته بصورت زیر است:

$$\gamma(x;\alpha,\lambda)=\frac{f(x;\alpha,\lambda)}{F(x;\alpha,\lambda)}=\frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}} \qquad (۷.۲.۱)$$

برای همه مقادیر α،تابع معکوس مخاطره یک تابع نزولی از x می‌باشد.

تابع مخاطره و عکس آن برای محاسبه ماتریس اطلاعات فیشر پارامترهای نامعلوم استفاده می‌شوند. در توزیع GE، $\gamma(x;\alpha,\lambda)$ شکل مناسبی دارد بنابراین محاسبه ماتریس اطلاعات فیشر راحت می‌باشد.

۳.۱ آماره‌های ترتیبی

فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی تعمیم یافته با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس ۱ باشند. بنابراین $X_{(1)} < \cdots < X_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی این n متغیر تصادفی می‌باشند. تابع چگالی بزرگترین آماره ترتیبی یعنی $X_{(n)}$ بصورت زیر است:

$$f_{X_{(n)}}(x;\alpha)=n\alpha e^{-x}(1-e^{-x})^{n\alpha-1} \qquad (۸.۳.۱)$$

بنابراین، $X_{(n)}$ هم توزیع نمایی تعمیم یافته بترتیب با پارامتر شکل و مقیاس $n\alpha$ و ۱ دارد.

۴.۱ توزیع مجموع متغیرهای تصادفی نمایی تعمیم یافته

از آنجایی که تابع مولد گشتاور توزیع نمایی تعمیم یافته شکل مناسبی ندارد، توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل نمایی تعمیم یافته به‌راحتی بدست نمی‌آید.

اگر X دارای توزیع $GE(\alpha, ۱)$ باشد، می‌توان نشان داد که e^{-X} دارای توزیع بتا است. از آنجایی که مطالعه متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع بتا ساده‌تر است، برای بدست آوردن توزیع مجموع n متغیرتصادفی مستقل نمایی تعمیم یافته بطور مؤثری استفاده شده‌اند. توزیع مجموع این n متغیر تصادفی مستقل بصورت یک توزیع آمیخته نامتناهی نمایی تعمیم یافته می‌باشد. [۸] اگر $X \sim GE(\alpha, ۱)$، و $U = e^{-x}$ باشد $U \sim B(۱, \alpha)$ است.
بنابراین اگر $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که $X_i \sim GE(\alpha_i, ۱)$، بنابراین $U_i = e^{-X_i} \sim B(۱, \alpha_i)$ و U_iها برای $i = ۱, \ldots, n$ مستقل می‌باشند.

۵.۱ توزیع نمایی تعمیم یافته دومتغیره

با توجه به مطالبی که در مورد توزیع نمایی تعمیم یافته دوپارامتری گفته شد، فرض کنید که $\alpha_۱ > ۰$، $\alpha_۲ > ۰$، $\alpha_۳ > ۰$ و $\lambda > ۰$ باشد.

همچنین $U_۱ \sim GE(\alpha_۱, \lambda)$، $U_۲ \sim GE(\alpha_۲, \lambda)$ و $U_۳ \sim GE(\alpha_۳, \lambda)$ و مستقل از هم باشند. حال اگر تعریف کنیم $X_۱ = \max\{U_۱, U_۳\}$ و $X_۲ = \max\{U_۲, U_۳\}$ آنگاه دو متغیر $(X_۱, X_۲)$ دارای توزیع نمایی تعمیم یافته دومتغیره با پارامترهای شکل $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ و پارامتر مقیاس λ می‌باشند و بصورت $BVGE(\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \lambda)$ [۳] نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۵.۱ *اگر* $(X_۱, X_۲) \sim BVGE(\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$ *باشند توزیع توأم* $(X_۱, X_۲)$ *برای* $x_۱ > ۰$ *و* $x_۲ > ۰$ *بصورت زیر می‌باشد:*

$$F_{X_۱, X_۲}(x_۱, x_۲) = (۱ - e^{-x_۱})^{\alpha_۱}(۱ - e^{-x_۲})^{\alpha_۲}(۱ - e^{-z})^{\alpha_۳} \qquad (۹.۵.۱)$$

که $z = \min\{x_۱, x_۲\}$ می‌باشد.

اثبات : *به[۱۶]، مراجعه کنید.*

[۳] Bivariate Generalized Exponential

رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{GE}(x_1;\alpha_1)F_{GE}(x_2;\alpha_2)F_{GE}(z;\alpha_3)$$

$$= \begin{cases} F_{GE}(x_1;\alpha_1+\alpha_3)F_{GE}(x_2;\alpha_2) & if\ x_1 < x_2 \\ F_{GE}(x_1;\alpha_1)F_{GE}(x_2;\alpha_2+\alpha_3) & if\ x_2 < x_1 \\ F_{GE}(x;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) & if\ x_1 = x_2 = x \end{cases}$$

قضیه ۲.۵.۱ *اگر $(X_1,X_2) \sim BVGE(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ باشند، تابع چگالی توأم (X_1,X_2) برای $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ بصورت زیر است*

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} f_1(x_1,x_2) & if\ 0 < x_1 < x_2 < \infty \\ f_2(x_1,x_2) & if\ 0 < x_2 < x_1 < \infty \\ f_0(x) & if\ 0 < x_1 = x_2 = x < \infty \end{cases}$$

که در آن f_0، f_1 و f_2 به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= f_{GE}(x_1;\alpha_1+\alpha_3)f_{GE}(x_2;\alpha_2) \\ &= (\alpha_1+\alpha_3)\alpha_2(1-e^{-x_1})^{\alpha_1+\alpha_3-1}(1-e^{-x_2})^{\alpha_2-1}e^{-x_1-x_2} \\ f_2(x_1,x_2) &= f_{GE}(x_1;\alpha_1)f_{GE}(x_2;\alpha_2+\alpha_3) \\ &= (\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1(1-e^{-x_1})^{\alpha_1-1}(1-e^{-x_2})^{\alpha_2+\alpha_3-1}e^{-x_1-x_2} \\ f_0(x) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}f_{GE}(x;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\ &= \alpha_3(1-e^{-x})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}e^{-x} \end{aligned}$$

اثبات : *حاصل $f_1(x_1,x_2)$ و $f_2(x_1,x_2)$ با درنظر گرفتن $\frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$ بترتیب برای $x_1 < x_2$ و $x_2 < x_1$ بدست می‌آیند.*
و $f_0(x)$ با نوشتن روابط زیر به‌دست می آید

$$\int_0^\infty\int_0^{x_2} f_1(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \int_0^\infty\int_0^{x_1} f_2(x_1,x_2)dx_2dx_1 + \int_0^\infty f_0(x) = 1 \qquad (۱۰.۵.۱)$$

$$\int_0^\infty\int_0^{x_2} f_1(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \alpha_2\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}e^{-x}dx \qquad (۱۱.۵.۱)$$

$$\int_0^\infty\int_0^{x_1} f_2(x_1,x_2)dx_2dx_1 = \alpha_1\int_0^\infty (1-e^{-x})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1}e^{-x}dx \qquad (۱۲.۵.۱)$$

داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} f_{\circ}(x)dx = \alpha_{۳}\int_{\circ}^{\infty}(۱-e^{-x})^{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}-۱}e^{-x}dx = \frac{\alpha_{۳}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}} \qquad (۱۳.۵.۱)$$

قضیه ۳.۵.۱ اگر $(X_{۱},X_{۲}) \sim BVGE(\alpha_{۱},\alpha_{۲},\alpha_{۳})$ باشند، در اینصورت

$$F_{X_{۱},X_{۲}}(x_{۱},x_{۲}) = \frac{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}F_a(x_{۱},x_{۲}) + \frac{\alpha_{۳}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}F_s(x_{۱},x_{۲})$$

که $z=\min\{x_{۱},x_{۲}\}$، $F_a(X_{۱},X_{۲}) = (۱-e^{-z})^{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}$ و

$$\begin{aligned} F_s(X_{۱},X_{۲}) &= \frac{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}}(۱-e^{-x_{۱}})^{\alpha_{۱}}(۱-e^{-x_{۲}})^{\alpha_{۲}}(۱-e^{-Z})^{\alpha_{۳}} \\ &\quad -\frac{\alpha_{۳}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}}(۱-e^{-Z})^{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}\alpha_{۳}} > \end{aligned}$$

اینجا $F_s(x_{۱},x_{۲})$ و $F_a(x_{۱},x_{۲})$ منفرد و کاملاً پیوسته می‌باشند.

اثبات : برای بدست آوردن $F_a(x_{۱},x_{۲})$ از

$$F_{X_{۱},X_{۲}}(x_{۱},x_{۲}) = F_a(x_{۱},x_{۲}) + (۱-p)F_s(x_{۱},x_{۲})$$

$\circ \le p \le ۱$، عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial^{۲}F_{X_{۱},X_{۲}}(x_{۱},x_{۲})}{\partial x_{۱}\partial x_{۲}} = pF_a(x_{۱},x_{۲}) = \begin{cases} f_{۱}(x_{۱},x_{۲}) & if\ x_{۱}\le x_{۲} \\ f_{۲}(x_{۱},x_{۲}) & if\ x_{۱} > x_{۲} \end{cases}$$

مقداری که برای p بدست می‌آید به‌صورت زیر است
با نوشتن حقایق زیر که:

$$\begin{aligned} p &= \int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{x_{۲}} f_{۱}(x_{۱},x_{۲})dx_{۱}dx_{۲} \\ &\quad + \int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{x_{۱}} f_{۲}(x_{۱},x_{۲})dx_{۲}dx_{۱} = \frac{a_{۱}+a_{۲}}{a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}} \\ F_a(x_{۱},x_{۲}) &= \int_{\circ}^{x_{۱}}\int_{\circ}^{x_{۲}} f_a(u,v)dudv \end{aligned}$$

وقتی p و $F_a(x_{۱},x_{۲})$ تعریف شوند، $F_s(x_{۱},x_{۲})$ از رابطه بالا بدست می‌آید.
فرض کنید A پیشامدی بصورت زیر باشد:

$$A = \{U_{۱} < U_{۳}\} \cap \{U_{۲} < U_{۳}\}$$

دراینصورت $P(A) = \frac{\alpha_{۳}}{\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}$

بنابراین

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid A)P(A) \\ &+P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid A')P(A') \end{aligned}$$

بعلاوه برای z که قبلاً تعریف کردیم

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid A')$$

و

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid A) = (1 - e^{-Z})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$$

با تفریق حاصل قبلی از ۱ بدست می‌آید.

بوضوح $(1 - e^{-Z})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$، منفرد است و مشتق جزئی دوم آن زمانی که $x_1 \neq x_2$ است صفر می‌باشد، و $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \mid A')$ قسمت کاملاً پیوسته است و مشتق جزئی دوم آن یک تابع چگالی می‌باشد.

بنابراین توزیع BVGE از یک قسمت پیوسته و یک قسمت منفرد تشکیل شده است.

پیوست الف
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

برآوردگر بیز	Bayes estimator
برآوردگر کمترین مربعات	Least squares estimator
برآوردگر کمترین مربعات وزن‌دار	Weighted least squares estimator
برآوردگر گشتاوری	Moment estimator
برآوردگر ماکزیمم درستنمایی	Maximum likelihood estimator
برآوردگر L- گشتاوری	L-moment estimator
برآوردگر نااریب	Unbiased estimator
پلی گاما	Polygamma
تابع بقاء	Survial function
تابع زیان	Loss function
تابع مخاطره	Hazard function
تابع مخاطره معکوس شده	Reserved hazard function
توزیع پسین	Posterior distribution
توزیع پیشین	Prior distribution
توزیع پیشین مزدوج	Canjugate prior distribution
توزیع نمایی تعمیم یافته	Generalized exponential distribution
روش نقطه ثابت	Fixed point method
ریشه دوم میانگین مربعات خطا	Square root of the mean squared errors
زنجیره‌ی مارکوف مونت کارلو	Markov Chain Monte carlo
مقعر	Concave
موازی	Parallel
ناآگاهی بخش	Non-informative
نمایی توانی	Exponentiated exponential

نمونه گیری گیبس .... Gibbs sampling

پیوست ب
برنامه

```
\lr{uhuhouhhohohohjn}
```

کتاب‌نامه

[۱] Ahuja، C. J. and Nash، W. S. (۱۹۶۷)، The generalized Gompertz-Verhulst family of distributions، *Sankhya*، Ser. A.، Vol. ۲۹، ۱۵۶-۱۴۱.

[۲] Basu، S.، Basu، A. P.، Mukhopadhyay، C.، (۱۹۹۹)، Bayesian analysis for masked system failure data using non-identical Weibull models، *Journal of Statistical Planning and Inference*، Vol.۷۸، ۲۷۵-۲۵۵.

[۳] David، H. A. (۱۹۸۱)، *Order Statistics*، ۲nd edition، New York، Wiley.

[۴] Devroye، L.، (۱۹۸۶)، *Non uniform Random Variate Genera- tion*، Springer، New York.

[۵] Gompertz، B. (۱۸۲۵)، On the nature of the function expressive of the law of human mortality، and on a new mode of determin- ing the value of life contingencies، *Philosophical Transactions of the Royal Society London*، Vol. ۱۱۵، ۵۱۳ - ۵۸۵.

[۶] Gupta، R. C.، Gupta، P. L. and Gupta، R. D. (۱۹۹۸)، Modeling failure time data by Lehmann alternatives، *Communications in Statistics Theorey and Methods*، Vol. ۲۷، ۸۸۷ -۹۰۴.

[۷] Gupta، R. D. and Kundu، D. (۲۰۰۱a)، Exponentiated - exponen- tial family: an alternative to gamma and Weibull، *Biometrical Journal*، Vol. ۴۳، ۱۱۷ - ۱۳۰.

[۸] Gupta، R. D. and Kundu، D. (۱۹۹۹). Generalized exponential distributions، *Australian and New Zealand Journal of Statistics*، Vol. ۴۱، ۱۷۳ - ۱۸۸.

[۹] Gupta، R. D.، Kundu، D.، (۲۰۰۷)، Generalized exponential distribution: existing results and some recent developments، *Journal of Statistical Planning and Inference*، Vol. **۱۳۷(۱۱)**، ۳۵۳۷ - ۳۵۴۷.

[۱۰] Gupta، R. D. and Kundu، D. (۱۹۹۹b)، Generalized Exponential Distributions: Statistical Inferences، *Technical Report*، The University of New Brunswick، Saint John.

[۱۱] Gupta، R. D.، Kundu، D.، (۲۰۰۰)، Generalized Exponential Distribution: Different method of estimations، *Journal of Statistical Computation and Simulation*، Vol. **۶۹**، ۳۳۷-۳۱۵.

[۱۲] Gupta، R. D. and Kundu، D. (۲۰۰۲)، Generalized exponential distributions: statistical inferences، *Journal of Statistical Theory and Applications*، Vol. ۱، ۱۰۱ - ۱۱۸.

[۱۳] Hosking، J. R. M. (۱۹۹۰)، L-Moment: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics، *Journal of Royal Statistical Society*، Ser. B، Vol. **۵۲(۱)**، ۱۰۵ - ۱۲۴.

[۱۴] Kao، J. H. K. (۱۹۵۸)، Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies، *Transaction of IRE-Reliability and Quality Control*، Vol. ۱۳، ۱۵ - ۲۲.

[۱۵] Kao، J. H. K. (۱۹۵۹)، A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life testing electron tubes، *Technometrics*، Vol. ۱، ۳۸۹ - ۴۰۷.

[۱۶] Kundu، D. and Gupta، R. D. (۲۰۰۹). Bivariate generalized exponential distributions، *Journal of Multivariate Analysis*، Vol. ۱۰۰، ۵۹۳-۵۸۱.

Exponential Generalized ،(۲۰۰۸) D. R. Gupta، and D. Kundu، [۱۷]
Statistics Computational Estimations، Bayesian Distribution:
.۱۸۷۳-۱۸۸۳ ،۵۲ Vol. *Analysis، Data and*

gener- of way convenient A ،(۲۰۰۷) D.، R. Gupta، D.، Kundu، [۱۸]
exponential generalized using variables random gamma ating
.۲۷۹۶-۲۸۰۲ ،۵۱ Vol. *Anal، Data Statist. Comput.* distribution،

Tra- *method، Bayesian Approximate* ،(۱۹۸۰) V.، D. Lindley، [۱۹]
.۲۲۳-۲۳۷ ،۳۱ Vol. Estadist، bajos

Exponentiated ،(۱۹۹۳) K. D. Srivastava، and S. G. Mudholkar، [۲۰]
Trans- IEEE data، failure bathtub analyzing for family Weibull
.۳۰۲- ۲۹۹ ،۴۲ Vol. *Reliability، on actions*

the and Scientists of Subjectivity The ،(۲۰۰۱) J.، S. Press، [۲۱]
NewYork Wiley، *Approach، Bayesian*

exponential generalized for Inferences .۲۰۰۲ Z.، M. Raqab، [۲۲]
Statistical of Journal statistics. record on based distribution
.۳۳۹-۳۵۰ ،۱۰۴ Vol. *Inference، and Planning*

loca- the of Estimation .۲۰۰۱ M.، Ahsanullah، Z.، M. Raqab، [۲۳]
distribu- exponential generalized of parameters scale and tion
Computa- Statistical of Journal statistics. order on based tion
.۱۰۹-۱۲۴ ،۶۹ Vol. *Simulation، and tion*

cen- type-II in matrix information Fisher .۲۰۰۲ G.، Zheng، [۲۴]
Biometrical family. exponential exponentiated from data sored
.۳۵۳-۳۵۷ ،۴۴ Vol. *J،*

of Analysis Statistical for Methods (۱۹۷۴) D. N. Singpurwalla، [۲۵]
York. New Wiley، ،*Data Life and Reliability*

esti- squares Least ،(۱۹۸۸) J. Wilson، and S. Venkatraman، [۲۶]
sys- translation Johnson's in function distribution of mation
Vol. *Simulation، and Computation Statistical of Journal*tem،
.۲۹۷ - ۲۷۱ ،۲۹

suit population la loi la sur Notice ،(۱۸۳۸) F. P. Verhulst، [۲۷]
et mathematique Correspondence accroissement، son dans
.۱۲۱- ۱۱۳ ،۱۰ Vol. *Quetelet، J. A. L. publiee physique،*

la sur mathematiques Recherches ،(۱۸۴۵) F. P. Verhulst، [۲۸]
de Memoires Nouvelles population، dela daccroissement loi
Bruxelles، de Belles-Lettres et Sciencs des Royale l'Academie
.۳۸-۵۴ ،۱۸ Vol.

loi la sur memoire Deuxieme ،(۱۸۴۷) F. P. Verhulst، [۲۹]
l'Academie de Memoires population، la de d'accroissement
Bel- de Beaux-Arts des et Lettres des Sciences، des Royale
.۳۲-۳۸ ،۲۰ Vol. ،۲ Series *gique،*

Abstract

generalized or exponential exponentiated Two-parameter
ex- the of member particular a is distribution exponential
exponen- Generalized distribution. Weibull ponentiated
func- density unimodal skewed right a has distribution tial
density the to similar funcion hazard monotone and tion
Weibull and gamma the of functions hazard and functions
ef- quite used be can it that observed is It distributions.
place in data skewed or data lifetime analyze to fectively
first thesis، this In distribution. Weibull and gamma of
meth- classical Then considered. are properties several
Bayes Finally discussed. are estimation parameter of ods
Due introduced. are parameters unknown of estimators
using approximation an calculation analytic impossible to
approxi- The used. are sampling Gibbs and idea Lindley
maximum the with compared are estimators Bayes mated
estimators. likelihood

**of Method distribution؛ exponential Generalized Keywords:
least Weighted estimator؛ squares Least estimator؛ moment
estima- L-moment estimator؛ Percentiles estimator؛ squares
Maximum function؛ loss error Squared estimator؛ Bayes tor؛
estimator. likelihood**

Technology of University Amirkabir ۳cm
Polytechnic) (Tehran

Science Computer and Mathematics of Faculty
Statistics of Department

in Dissertation M.Sc.
Statistics

# of Estimation Parameter Exponential Generalized Distribution

By:
Rekabdar Ali Seyed

Supervisor:
Aminghafari Mina Dr.

Advisor:
Khorram Esmaile Dr.

۲۰۱۱ Winter