فهرست مطالب

فصل ۱

نمایش اعداد و خطا

۱.۱ نمایش اعداد

اعداد به دو شکل ممیز ثابت و ممیز شناور قابل نمایش هستند. در شکل **نمایش ممیز ثابت**، تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز، ثابت می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ **دقت ماشین**

ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم تعریف ۱.۱.۱ تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز عدد $A = ۳۲/۴$ به ترتیب برابر ۴ و ۲ باشد. از این‌رو، نمایش ممیز ثابت این عدد برابر $A = ۰۰۳۲/۴۰$ است.

مثال ۳.۱.۱. چند عدد و نمایش ممیز شناور آنها در زیر آمده است:

(الف) $A = ۳۲/۴ = ۰/۳۲۴ \times ۱۰^{۲} = ۰/۰۳۲۴ \times ۱۰^{۳} = ۰/۰۰۳۲۴ \times ۱۰^{۴},$

(ب) $A = -۰/۰۰۲۴ = -۰/۰۰۲۴ \times ۱۰^{۰} = -۰/۲۴ \times ۱۰^{-۲}.$

به مثال زیر توجه کنید ([؟]):

مثال ۴.۱.۱. آونگ ساده‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که با نخی به طول L به تکیه‌گاهی آویزان است و به اندازه زاویه θ از حالت عمودی منحرف شده است (شکل (؟؟)). برای تعیین مدل ریاضی مسأله، از مقاومت

هوا و اصطکاک بین نخ و آویز صرف‌نظر می‌کنیم.

حل

۱.۱.۱ ارقام بامعنی و ارقام بامعنی درست

تعریف ۵.۱.۱ (ارقام بامعنی)

ارقام بامعنی یک عدد ناصفر A، همان ارقام بامعنی مانتیس A یعنی b تعریف می‌شوند که ارقام بامعنی b عبارتند از ارقام مخالف صفر b، صفرهای بین این ارقام ناصفر و صفرهایی که بعد از آخرین رقم ناصفر برای نشان دادن دقت قرار می‌گیرند.

مثال ۶.۱.۱. تعداد ارقام بامعنی چند عدد در زیر آمده است:

الف) $A = ۲/۰۰۱ = ۰/۲۰۰۱ \times ۱۰^{۱} = ۰/۰۲۰۰۱ \times ۱۰^{۲},$ ۴ رقم معنی‌دار

ب) $A = ۲/۰۴۴۳۶۵ = ۰/۲۰۴۴۳۶۵ \times ۱۰^{۱},$ ۷ رقم معنی‌دار

ج) $A = -۳۵۴/۰۱۱۰۰ = -۰/۳۵۴۰۱۱۰۰ \times ۱۰^{۳},$ ۸ رقم معنی‌دار

پرسش ۷.۱.۱. *آیا دقت یک تقریب به تعداد ارقام بامعنی آن عدد بستگی دارد؟*

تعریف ۸.۱.۱ (ارقام بامعنی درست)

فرض کنید $a \neq ۰$ تقریبی از عدد حقیقی ناصفر A باشد و

$$|a| = a_m \times ۱۰^m + a_{m-۱} \times ۱۰^{m-۱} + \cdots , \quad (۱.۱)$$

که $a_m \neq ۰$ برای $m \in \mathbb{Z}$ و $۰ \leq a_i \leq ۹$ به ازای $i = m, m-۱, \cdots$ اعدادی صحیح باشند. اگر s تعداد ارقام بامعنی a باشد، آنگاه، بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n \leq s$ و در نامساوی

$$|A - a| \leq ۵ \times ۱۰^{m-n}, \quad (۲.۱)$$

صدق کند، تعداد ارقام بامعنی درست a نامیده می‌شود. اگر $n > s$، آنگاه تعداد ارقام بامعنی درست a، همان تعداد ارقام بامعنی a یعنی s است.

مثال ۹.۱.۱. تعداد ارقام بامعنی درست تقریب‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) $A = ۲, \quad a = ۲/۰۰۱$،

که ۲.۱ بنابراین $m = ۰$. از طرفی،

پرسش ۱۰.۱.۱. *اگر دو عدد $a_۱$ و $a_۲$ تقریبی از عدد A و دارای ارقام بامعنی درست یکسان باشند کدام یک تقریب بهتری را می‌دهد؟*

۲.۱ تقریب یک عدد و اندازه خطای آن

۱.۲.۱ تقریب یک عدد

مثال ۱.۲.۱. اعداد زیر تا ۴ رقم بعد از اعشار گرد شده‌اند:

(الف) $A = ۲/۰۰۳۴۲۵۱, \quad ۰/۲۵۱ < ۰/۵, \quad a = ۲/۰۰۳۴,$

ب) $A = -۲/۰۰۳۹۸۵۱, \quad ۰/۸۵۱ > ۰/۵, \quad a = -۲/۰۰۴۰,$

ج) $A = ۲/۰۰۳۴۵۰۰, \quad ۰/۵۰۰ = ۰/۵, \quad b_۴ = ۴$ زوج$, \quad a = ۲/۰۰۳۴,$

د) $A = ۲/۰۰۳۷۵۰۰, \quad ۰/۵۰۰ = ۰/۵, \quad b_۴ = ۷$ فرد$, \quad a = ۲/۰۰۳۸.$

قضیه ۲.۲.۱. *اگر a گردشده عدد A تا n رقم اعشار باشد، آنگاه*

$$|A - a| \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-n}. \qquad (۳.۱)$$

۲.۲.۱ خطای تقریب

تعریف ۳.۲.۱

فرض کنیم a تقریب عدد A باشد. آنگاه $e(a) := |A - a|$ را **خطای مطلق** و $\delta(a) := \frac{e(a)}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|}$ را **خطای نسبی** می‌نامند.

قضیه ۴.۲.۱. **(قضیه انتشار خطا)** *اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B و همه این اعداد مثبت باشند، آنگاه:*

$$\text{(الف)} \quad e(a \pm b) \leq e(a) + e(b),$$