معرفی ساختارهای متفاوت روی مینفلد

نگارش:

استاد راهنما:

در این سمینار موارد زیر را بررسی می‌کنیم :

۱. ساختار تماسی و تقریباً تماسی

۲. ساختار تقریباً مختلط و ساساکی

۳. ساختار K-تماسی

بخش اول

ساختار و تقریباً تماسی

تعریف

ساختار تقریباً تماسی و منیفلد های تقریباً تماسی:

منیفلد M از بعد $۲n + ۱$ را در نظر می گیریم، ساختار سه تایی (φ, ξ, η) را یک ساختار تقریباً تماسی می نامیم در صورتی که ξ یک میدان برداری، η یک ۱-فرم و φ یک $(۱, ۱)$ تانسور است که در شرایط زیرصدق می کند:

$$(۱)\eta(\xi) = ۱$$

$$(۲)\varphi^۲ x = -x + \eta(x)\xi$$ به ازای هر میدان برداری x

منیفلد Mبا این ساختار را منیفلد تقریباً تماسی می نامیم.

نکته

با تعریف هر منیفلد تقریباً تماسی باید میدان برداریξ را روی منیفلد M داشته باشیم و لذا چون شاخص اویلر هر منیفلد فشرده که در این جا با بعد فرد در نظر گرفته شده است صفر می باشد، لذا بنابر قضیه هوپف وجود این میدان برداری در سرتاسر M تضمین می شود.

گزاره

برای ساختار تقریباً تماسی روابط زیر برقرار است:

$(۱)\varphi(\xi) = ۰$

$(۲)\eta \circ \varphi = ۰$

$(۳)rank\varphi = ۲n$

قضیه

بعد منیفلد تقریباً تماسی M^m فرد است.

قضیه

گروه ساختاری کلاف مماسی منیفلدهای تقریباً تماسی $U(n) \times ۱$ می باشد، که درآن $U(n)$ گروه یکانی است و هر منیفلد که گروه ساختاری آن $U(n) \times ۱$ باشد را منیفلد تقریباً تماسی می نامند.

گزاره

هر منیفلد تقریباً تماسی جهت پذیر است.

تعریف

ساختار تقریباً تماسی متریک و منیفلد تقریباً تماسی متریک:

ساختار تقریباً تماسی (φ, ξ, η) مجهز به متر ریمانی g که در شرط

$$g(\varphi x, \varphi y) = g(x, y) - \eta(x)\eta(y)$$

صدق می کند را ساختار تقریباً تماسی متریک می نامیم.

منیفلد M مجهز به ساختارتقریباً تماسی متریک را منیفلد تقریباً تماسی متریک می نامیم.

قضیه

در یک منیفلد تقریباً تماسی متریک با ساختار (φ, ξ, η, g)داریم:

$$(۱) g(x, \xi) = \eta(x)$$

$$(۲) g(\varphi x, \varphi y) = g(x, y) - \eta(x)\eta(y)$$

$$(۳) g(\xi, \xi) = ۱$$

ویژگی

برای $x, y \in \chi(M)$ و φ یک $(۱,۱)$ تانسور و g به عنوان یک متر ریمانی رابطه ی زیر برقرار است:

$$g(\varphi x, y) + g(x, \varphi y) = ۰$$

$$g(\varphi^{۲}x, \varphi(y)) = g(\varphi x, y) - \eta(\varphi x)\eta(y) = g(\varphi x, y)(۱)$$

$$g(\varphi^{۲}x, \varphi(y))$$

$$= g(-x + \eta(x)\xi, \varphi y)$$

$$= -g(x, \varphi y) + \eta(x)g(\xi, \varphi y)$$

$$= -g(x, \varphi y) + \eta(x)\eta(\varphi y)$$

$$= -g(x, \varphi y)(۲)$$

با مقایسه ی رابطه ی (۱) و (۲) ویژگی بیان شده برقرار است، و این بدان معنی است که φ نسبت به g پادمتقارن است.

تعریف

ساختار تماسی و منیفلد های تماسی:

منیفلد M از بعد $2n+1$ را در نظر می گیریم، هرگاه فرم η روی M موجود باشد به طوری که $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ این ساختار را تماسی می نامیم.

منیفلد M با این ساختار را منیفلد تماسی می نامیم، که در اینجا η یک فرم تماسی نام می گیرد.

قضیه

منیفلد M از بعد $۲n + ۱$ مجهز به ساختار تماسی را نظر می‌گیریم، ساختار تقریباً تماسی متریک (φ, ξ, η, g) وجود دارد به طوری که

$$g(x, \varphi y) = d\eta(x, y)$$

تعریف

دو فرم اساسی:

برای ساختار تقریباً تماسی متریک (φ, ξ, η, g) روی M قرار می دهیم $\Phi(x, y) = g(x, \varphi y)$

که Φ را دو فرم اساسی ساختار تقریباً تماسی متریک می نامیم، لذا داریم:

$$\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$$

گزاره

منیفلد تماسی M و فرم تماسی η را در نظر می گیریم، ثابت می شود:

$(۱)\ell_\xi \eta = ۰$

$(۲)\ell_\xi d\eta = ۰$

قضیه

برای هر نقطه از منیفلد تماسی، سیستم مختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z)$

به ازای $\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$ وجود دارد.

نکته

برای فرم $\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$ میدان برداری متناظر به صورت $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ محاسبه می شود.

نکته

هر منیفلد تقریباً تماسی متریک را یک منیفلد تماسی متریک می نامیم اگر $\Phi = d\eta$.

مثال

منیفلد $M = R^{۳}$ را در نظر می گیریم، برای فرم $\eta = dz + xdy$ محاسبه می شود که η یک فرم تماسی است.

تعریف

انتقال یا تبدیل تماسی:

دیفئومورفیسم $f : U \longrightarrow U'$ که U و U' زیر مجموعه های باز از R^{2n+1} می باشند را تبدیل یا انتقال تماسی می گوئیم، اگر و فقط اگر $f^*\eta = \tau\eta$ که η تابع حقیقی مقدار و ناصفر از U است.

تعریف

مجموعه ی همه ی تبدیلات تماسی را با Γ نمایش می دهیم که Γ شبه گروه است یعنی:

۱)اگر $f : U \longrightarrow U'$ و $g : V \longrightarrow V'$ تبدیلات تماسی باشند به طوری که $U' \cap V \neq \emptyset$ لذا داریم $gof : f^{-1}(U' \cap V) \longrightarrow g(U' \cap V)$ تبدیل تماسی می باشند.

۲) مجموعه ی Γ شرکت پذیر است.

۳)هر عضو Γ دارای عضو وارون است.

تعریف

تبدیل تماسی محض:

چنانچه برای یک تبدیل تماسی داشته باشیم $\tau = ۱$ لذا f به ازای $f^*\eta_\circ = \eta_\circ$ تبدیل تماسی محض می باشد.

تعریف

مجموعه ی همه تبدیلات تماسی محض را با $\Gamma_\circ$ نمایش می دهیم که یک زیر شبه گروه Γ است.

تعریف

منیفلد تماسی در حالت کلی :

منیفلد M از بعد $2n+1$ را منیفلد تماسی در حالت کلی گفته می شود، اگر پوشش باز U_α از M همراه با همئومورفیسم $f_i : U_i \longrightarrow V_i \subset R^{2n+1}$ موجود باشد به طوری که $f_{ij} = f_i \circ f_j^{-1}$

نکته

دو سیستم مختصاتی U_i', f_i' و U_i, f_i معادلند، اگر $f_i' \circ f_j \in \Gamma$ باشد.

نتیجه

برای منیفلد K -تماسی دو معادل زیر ارائه می شود:

۱ــ منیفلد متری تماسی K-تماسی است، اگر و فقط اگر $\ell_\xi \varphi = 0$ باشد.

۲ــ منیفلد متری تماسی K-تماسی است، اگر و فقط اگر انحنای ریچی آن در راستای ξ برابر $2n$ باشد.

مراجع

[1] Blair, D.E. *Rimanian Geometry of Contact and Symplectic Manifold*, Birkhäuser, Basel (2002)

[2] J. Meng, Y. B. Jun, *Stracture of Contact Manifold*, Kyung Moon Sa Co, Seoul, Korea (1994).

[3] T. D. Lei, C. C. Xi, *on Kenmotso Manifold*, Math. Japonica **30**, 511-517 (1985).

[4] W.P. Huang, *Nil-radical in BCI-algebras*, Math. Japonica **37**, 363-366 (1992).