فصل ۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱.۱ مقدمه

مثال ۱.۱.۱ در کشت معینی آهنگ رشد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر در ابتدا ۵۰۰ باکتری موجود باشد و تعداد باکتری‌ها در هر ۶ دقیقه ۲ برابر شود، پس از چه مدت تعداد باکتری‌ها به ۵۰۰۰۰۰ می‌رسد؟

حل. چون در زمان $t = ۰$ تعداد باکتری‌ها ۵۰۰ می‌باشد. بنابراین $y(۰) = y_۰ = ۵۰۰$ و تعداد در زمان t برابر است با $y = y_۰e^{kt} = ۵۰۰e^{kt}$.

ابتدا باید نرخ رشد یعنی k را محاسبه کنیم. با توجه به فرض مسأله داریم

$$y(۶) = ۲ \times ۵۰۰ \Rightarrow ۵۰۰e^{۶k} = ۱۰۰۰ \Rightarrow e^{۶k} = ۲$$
$$\Rightarrow ۶k = \ln ۲ \Rightarrow k = \frac{۱}{۶} \ln ۲ = \ln \sqrt[۶]{۲}$$

اکنون باید زمانی را بیابیم که $y(t) = ۵۰۰۰۰۰$ باشد. بنابراین داریم

$$۵۰۰e^{(\ln \sqrt[۶]{۲})t} = ۵۰۰۰۰۰ \Rightarrow e^{\ln(\sqrt[۶]{۲})t} = ۱۰۰۰ \Rightarrow \ln \sqrt[۶]{۲}t = \ln ۱۰۰۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln ۱۰۰۰}{\ln \sqrt[۶]{۲}} = \frac{۱۸ \ln ۱۰}{\ln ۲} \approx ۵۹/۸$$

یعنی در زمان کمتر از ۱ ساعت تعداد باکتری‌ها به ۵۰۰۰۰۰ می‌رسد. ■

۱.۱.۱ قانون سرمایش نیوتن

هنگامی که جسم داغی را در محیط سرد قرار می‌دهیم، گرمای جسم به محیط منتقل می‌شود و طبیعتاً نرخ انتقال گرما متناسب با اختلاف دمای جسم با محیط است. یعنی در ابتدا جسم داغ با سرعت بیشتری خنک می‌شود و هر چقدر که اختلاف دمای جسم و محیط کمتر شود، آهنگ تغییر دمای جسم و محیط کمتر شود، آهنگ تغییر

دمای جسم نیز کمتر می‌شود و به طریق مشابه اگر جسمی با دمای پایین در محیطی گرم قرار داده شود، دمای جسم بالا می‌رود و میزان تغییرات دمای جسم در هر لحظه متناسب با اختلاف دمای جسم و محیط است.

اگر دمای جسم در لحظه اول T_0 و دمای محیط که ثابت در نظر گرفته می‌شود، برابر T_s باشد که $T_0 > T_s$ (در حالت $T_0 < T_s$ نیز اثبات مشابه است) و اگر T دمای جسم در لحظه t باشد، از مطالب اخیر برمی‌آید که

۲.۱ تعاریف مقدماتی

بسیاری از مسائل فیزیکی به صورت تابعی از زمان و متغیرهای مستقل دیگر بیان می‌شوند. رابطه بین مقادیر تابع و متغیر زمان در یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی صدق می‌کند.

دسته منحنی‌ها و مسیرهای متعامد

گاهی اوقات یافتن معادله دیفرانسیلی که یک دسته منحنی در آن صدق کند، مورد نیاز است، به عبارتی دیگر اگر بخواهیم برای دسته منحنی، پارامتر (ثابت) را حذف کنیم می‌توان از معادله مشتق گرفت و سپس با توجه به معادله اصلی و معادله دیفرانسیل، پارامتر را حذف کرد.

حل. چون دو پارامتر موجود است بنابراین از معادله $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ دو بار مشتق می‌گیریم. داریم

$$y' = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x$$

$$y'' = -9c_1 \cos 3x - 9c_2 \sin 3x$$