فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه

در این پایان‌نامه که بر مبنای دو مقاله‌ی [؟] و [؟] تهیه شده است، ابتدا مقدمه‌ای از برخی مفاهیم مورد نیاز و قراردادهای ملزومه را بیان می‌کنیم، سپس در فصل دوم با ارائه‌ی چهارچوبی رها از قید و بندهای نحوی به اثبات قضایای اول و دوم ناتمامیت و قضیه تارسکی می‌پردازیم، و در فصل سوم با بیان پارادوکس دروغگو و تلاش برای صوری کردن آن، نشان خواهیم داد که محدودیت‌های مذکور چگونه از این پارادوکس قابل بیان هستند و به عبارتی این پارادوکس دلیلی برای وجود این محدودیت‌ها می‌باشد.

۱-۲ منطق موجهات

در این بخش ابتدا به بررسی منطق گزاره‌ها پرداخته و سپس به منطق موجهات خواهیم رسید [؟]. در منطق گزاره‌ها تنها نمادهای غیرمنطقی مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا از حروف بوده و عملگرهای منطقی شامل $\neg$، $\wedge$ و $\vee$ می‌باشند. عملگرهای دیگر نیز همانند عملگر ثابت نادرست (غلط) $\perp$ و عملگر شرطی $\rightarrow$ نیز در این منطق وجود دارند. بیان نحوی منطق

گزاره‌ها بسیار ساده و به این صورت است که: هرکدام از حروف گزاره محسوب می‌شوند، ثابت $\perp$ نیز گزاره است و اگر A و B گزاره باشند $A \to B$ نیز گزاره خواهد بود.
بیان معنایی این منطق نیز ساده است: برای حروف، یک ارزش درستی همانند ω تعبیر می‌کنیم به طوری که برای درستی ارزش ۱ و برای نادرستی (غلط) ارزش ۰ را بدهد. اکنون اگر قرار دهیم $\omega(\perp) = ۰$ و تعریف کنیم $\omega(A \to B) = ۱$ تنها زمانی که $\omega(A) = ۰$ یا $\omega(B) = ۱$ باشد؛ می‌توانیم ارزش‌گذاری خود را به فرمول‌ها گسترش دهیم. بدین صورت که، $\neg A$ را معادل با فرمول $A \to \perp$ و $A \wedge B$ را معادل با $\neg(A \to \neg B)$ و $A \vee B$ را معادل $\neg A \to B$ بگیریم. یک گزاره D را نتیجه‌ای از مجموعه گزاره‌های Γ گوییم هرگاه در تمام تعابیری که گزاره‌های Γ درست‌اند، درست باشد و گوییم D معتبر است هرگاه در تمام تعابیر درست باشد.

منطق موجهات از اضافه کردن دو عملگر $\Box$ به معنای «لزوم» و $\Diamond$ به معنای «امکان» به همراه اضافه کردن یک شرط به گزاره‌ها که، اگر A یک گزاره باشد آنگاه $\Box A$ نیز گزاره خواهد بود، به منطق گزاره‌ها حاصل می‌گردد. در این منطق فرمول $\Diamond A$ را معادل با $\neg\Box\neg A$ می‌گیریم. یک گزاره در منطق موجهات را یک راستگو[۱] نامیم هرگاه نتیجه‌ای از جانشینی گزاره‌های موجه به جای جملات معتبر منطق گزاره‌ها باشد. بنابراین، چون $p \vee \neg p$ برای هر حرف p در منطق گزاره‌ها معتبر است، لذا $A \vee \neg A$ یک راستگو برای هر گزاره موجه A در منطق موجهات می‌باشد. از آنجایی که q، از p و $p \to q$ نتیجه می‌شود، لذا برای هر گزاره موجه همچون A و B، B نتیجه منطقی از A و $A \to B$ خواهد بود. به این قاعده که B را از A و $A \to B$ نتیجه می‌دهد عنوان قاعده **MP**[۲] (وضع مقدم) داده شده است.

سیستم‌های بسیار زیادی برای منطق موجهات وجود دارند که هر کدام به یک شکل به تعریف مفهوم اثبات (برهان) می‌پردازد. کوچکترین سیستم برای منطق موجهات نظام **K** است که به طریق زیر به دست می‌آید. اصول نظام **K** شامل تمام راستگوها و همه‌ی جملات

[۱] Tautology

[۲] Modus Ponens

به فرم

$$\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$$

می‌باشد و قواعد نظام $\mathbf{K}$ علاوه بر قاعده $\mathbf{MP}$ شامل قاعده دیگری نیز می‌باشد که از اثبات‌پذیری A، اثبات‌پذیری $\Box A$ را نتیجه می‌دهد؛ این قاعده با عنوان قاعده لزوم شناخته می‌شود. یک برهان در $\mathbf{K}$ یک دنباله از جملاتی است که هرکدام از آن‌ها یا یک اصل بوده و یا به وسیله‌ی قواعدی که عنوان شد به دست آیند. لذا یک گزاره زمانی اثبات‌پذیر یا یک قضیه در $\mathbf{K}$ می‌باشد که آخرین جمله از یک برهان باشد. برای یک مجموعه متناهی $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_n\}$، $\bigwedge_i C_i$ را عطف همه‌ی اعضای Γ در نظر می‌گیریم و گوییم Γ ناسازگار است اگر $\neg \bigwedge_i C_i$ یک قضیه باشد. اگر D یک گزاره باشد، گوییم D از Γ نتیجه می‌شود هرگاه $\bigwedge_i C_i \to D$ یک قضیه باشد. نظام‌های قوی‌تری نیز برای منطق موجهات وجود دارند که با افزودن هرکدام از اصول زیر به نظام $\mathbf{K}$ پدید می‌آیند:

$$\Box A \to A \quad (T)$$

$$\Box A \to \Box\Box A \quad (۴)$$

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A \quad (L).$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برخی از این اصول به اسامی خاصی معروف می‌باشند که برای نام‌گذاری نظام جدید استفاده می‌شوند. به طور مثال نظام $\mathbf{K4}$ نظامی است که از افزودن اصل (۴) به نظام $\mathbf{K}$ به دست می‌آید. از نظام‌های دیگر برای منطق موجهات نظام $\mathbf{GL}$ است که با افزودن اصول (۴) و (L) به نظام $\mathbf{K}$ به دست می‌آید.