دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

سمینار کارشناسی ارشد با عنوان

دامنه توانی احتمالی برای فضاهای فشرده پایدار با استفاده از فضاهای مرتب فشرده

استاد راهنما

دکتر----

پژوهشگر

وحید دامن افشان

تابستان ۱۳۸۸

فهرست مطالب

چکیده

این سمینار که بر اساس مرجع [۱۲] تنظیم شده است، به بحث در مورد فضاهای فشرده پایدار و فضاهای مرتب فشرده می‌پردازد. فضاهای فشرده پایدار X_s در واقع از ضعیف کردن توپولوژی فضاهای مرتب فشرده X به مجموعه‌های بالایی باز ناشی می‌شود. در این سمینار به بررسی دامنه توانی احتمالی یک فضای فشرده پایدار X_s با استفاده از فضای مرتب فشرده X و ابزارهای کلاسیک نظریه اندازه و آنالیز تابعی می‌پردازیم. این کار به ما اجازه می‌دهد که یک روش زیبا، جمع و جور و مشهور و همچنین نتایج جدیدی که در قضیه ۴.۷ خلاصه شده است را نتیجه بگیریم.

واژه های کلیدی: دامنه‌های معنایی، دامنه توانی احتمالی، فضاهای فشرده پایدار.

۱ مقدمه

درمعنی شناسی نمادین[۱]، ارزیابی‌ها و دامنه‌توانی احتمالی توسط جونز[۲]و پلاتکین[۳][۹] به عنوان جایگزینی برای احتمالات و فضای اندازه‌های احتمال، به منظور مدل بندی پدیده‌های احتمالی در برنامه‌ریزی معرفی شده است. اخیراً به دامنه توانی احتمالی توجه بیشتری شده است. بیشتر پیش‌زمینه‌ها در بحث دامنه توانی احتمالی بجز چند خاصیت اصلی که در [۷] آمده است همگی در پایان‌نامه‌هایی است که دسترسی به آنها به آسانی امکان‌پذیر نیست.

مبحث معنی شناسی نمادین، بر پایه نظریه فضاهای متریک یا نظریه دامنه از دیدگاه دی. اس. اسکات[۴] پایه‌گذاری شده است. به منظور بحث درباره اندازه‌ها و احتمالات برای معنی شناسی، باید مفاهیم کلاسیکی اندازه، احتمال و انتگرال را با دامنه‌ها سازگار کنیم. یک دامنه، یک مجموعه مرتب جزیی کامل جهت‌دار پیوسته است ([۷] را ببینید). هر دامنه، یک توپولوژی ذاتی، توپولوژی اسکات، که T_0 بوده و هاسدورف نیست را حمل می‌کند. ارزیابی‌ها که طبق تعریف، نوعی از اندازه را به هر مجموعه اسکات‌ـباز مرتبط می‌کنند، جای اندازه‌ها را می‌گیرند. ارزیابی‌ها روی یک دامنه از یک دامنه در خودش، دامنه توانی احتمالی توسعه‌یافته نامیده می‌شود.

[۱] Denotational semantics
[۲] Jones
[۳] Plotkin
[۴] D.S. Scott

البته مایلیم که ارزیابی‌ها را به اندازه های کلاسیک، و دامنه توانی احتمالی توسعه یافته را به فضای همه اندازه‌ها بازگو کنیم.

نظریه اندازه توپولوژیکی، تقریباً و منحصراً به بحث در مورد فضاهای هاسدورف، بخصوص به فضاهای موضعاً فشرده و فضاهای متریک تام پرداخته است. بنابراین، طبیعی است که دامنه‌هایمان را به دامنه‌هایی که برای توپولوژی لاوسون[۵]، هاسدورف فشرده هستند محدود کنیم که این توپولوژی لاوسون یک توپولوژی ذاتی روی دامنه‌هایی است که توپولوژی اسکات را تظریف می‌کنند. این محدودیت زیاد سنگین نیست به طوری که همه دامنه‌های مشمول در یک رسته بسته دکارتی از دامنه‌ها، فشرده لاوسون هستند([۱۰] را ببینید). دامنه‌هایی که لاوسون فشرده هستند، فشرده پایدار نیز نامیده می‌شوند. این کار ما را به تفکر بیشتر درباره فضاهای فشرده پایدار که اخیراً در مبحث معنی‌شناسی نیز خیلی مفید هستند، سوق می‌دهد([۱۱] را ببینید). فضاهای فشرده پایدار $(X, \mathcal{G})$ از دیدگاه ناخبین[۶][۱۷] دقیقاً فضاهایی هستند که از فضاهای مرتب فشرده $(X, \mathcal{G}, \leq)$، با ضعیف کردن توپولوژی آن به گردایه $\mathcal{G}$ از همه مجموعه‌های بالایی باز، ناشی می‌شوند.

برای اینکه بحث ما برای خوانندگانی که با نظریه دامنه آشنایی ندارند، ساده و قابل فهم باشد ما بیشتر روی فضاهای مرتب فشرده کار می‌کنیم. ما از آنالیز تابعی کلاسیک از یک طرف برای نتیجه‌گیری ارتباط نزدیک بین ارزیابی‌ها روی فضای فشرده پایدار $(X, \mathcal{G})$ و خصوصیات دامنه توانی احتمالی روی چنین فضایی، و از طرف دیگر اندازه‌های بورل منتظم و مجموعه محدب فشرده‌ای از اندازه‌های احتمال روی $(X, \mathcal{O})$ در ضعیف*ـ توپولوژی استفاده می‌کنیم. همه نتایج ما بخصوص برای دامنه‌هایی که فشرده لاوسون هستند بکار می‌روند.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعاریف و قضیه‌های بکار رفته در این قسمت، بجز مواردی که به روشنی ذکر شده است، از مرجع [۱] گرفته شده‌اند.

---

[۵] Lawson
[۶] Nachbin

تعریف ۱.۲. مجموعه P همراه با رابطه دوتایی $\leq$، یک مجموعه جزئاً مرتب یا poset، نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برای هر $x, y, z \in P$ برقرار باشد:

۱) $x \leq x$ (بازتابی)

۲) $x \leq y \bigwedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (تعدی)

۳) $x \leq y \bigwedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ (پادتقارنی)

تعریف ۲.۲. اگر شرط پادتقارنی را از تعریف ۱.۲ برداریم، چیزی که به دست می‌آید، یک **پیش‌ترتیب**[۷] است.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد.

۱. زیرمجموعه A از P یک **مجموعه بالایی** است اگر $x \in A$ برای هر $x \leq y$، $y \in A$ را ایجاب کند. مجموعه همه عناصر بالای عضوی از A را با $A \uparrow$ نشان می‌دهیم. هرگاه بیم اشتباه نرود، $\{x\} \uparrow$ را به صورت $x \uparrow$ نشان می‌دهیم. **مجموعه پایینی** و $A \downarrow$، بطور مشابه تعریف می‌شوند.

۲. عنصر $x \in P$ **کران بالا** برای زیرمجموعه $A \subseteq P$ نامیده می‌شود هرگاه x، بالای هر عنصری از A باشد. این حالت را معمولاً با $A \leq x$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه کران‌های بالای A را با $\mathrm{ub}(A)$ نشان می‌دهیم.

۳. عنصر $x \in P$ **ماکسیمال** است اگر هیچ عنصر دیگری از P، بالای آن نباشد؛ به عبارت دیگر $x \uparrow \bigcap P = \{x\}$. عنصر مینیمال نیز بطور مشابه تعریف می‌شود.

۴. اگر همه عناصر P، پایین عنصری مانند $x \in P$ باشند آنگاه x **بزرگ‌ترین عنصر** نامیده می‌شود. تعریف مشابه، **کوچک‌ترین عنصر** است که **عنصر زیر**[۸] نیز نامیده می‌شود.

[۷] Preorder
[۸] Bottom element

۵. اگر برای زیرمجموعه $A \subseteq P$، مجموعه کران‌های بالای A، یک کوچک‌ترین عنصر x را داشته باشند، آنگاه x **سوپریمم** یا **مفصل**[۹] A نامیده می‌شود و آن را به صورت $x = \bigsqcup A$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید P و Q دو مجموعه جزئاً مرتب باشند. تابع $f : P \to Q$ **یکنوا** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in P$ با شرط $x \le y$، در Q نیز داشته باشیم $f(x) \le f(y)$.

تعریف ۵.۲ ([۱۶]). فرض کنید $\mathcal{A}$، جبر زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی X باشد. یک **$\mathcal{A}$ـافراز**[۱۰] مجموعه X، افرازی توسط زیرمجموعه‌هایی است که همه آنها متعلق به $\mathcal{A}$ هستند.

تعریف ۶.۲ ([۱۶]). فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع کراندار $f : X \to \mathbb{R}$، S‌ـانتگرال‌پذیر است (نسبت به جبر $\mathcal{A}$ و اندازه کراندار نامنفی جمع‌پذیر متناهی μ)، هرگاه انتگرال بالایی و پایینی f، متناظر با μ و $\mathcal{A}$، با هم مساوی باشد که این انتگرال بالایی و پایینی به ترتیب بصورت

$$\overline{\int} f d\mu = \inf_{\mathcal{P}} S^u(f, \mu, \mathcal{P})$$

و

$$\underline{\int} f d\mu = \sup_{\mathcal{P}} S^l(f, \mu, \mathcal{P})$$

تعریف می‌شوند که در آن $\mathcal{P}$ ، یک $\mathcal{A}$ـافراز متناهی X است و

$$S^u(f, \mu, \mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sup f(P) \mu(P)$$

و

$$S^l(f, \mu, \mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \inf f(P) \mu(P).$$

از آنجایی که f و μ کراندارند لذا $S^u(f, \mu, \mathcal{P})$ و $S^l(f, \mu, \mathcal{P})$ خوش‌تعریف‌اند و آنها را به ترتیب مجموع بالایی داربوکس [۱۱] و مجموع پایینی داربوکس f متناظر با μ و $\mathcal{A}$ـافراز

[۹] Join
[۱۰] $\mathcal{A} - partition$
[۱۱] Darboux sum

متناهی $\mathcal{P}$ می‌نامند.
اگر f، S_انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال f را ریمان_اشتیلیس می‌نامند و با $S\int fd\mu$ نشان می‌دهند.

تعریف ۷.۲ ([۱۳]). فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. یک **ارزیابی**[۱۲] روی X تابعی مانند $\mu:\tau\to[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ با خواص زیر است

- μ اکید است: $\mu(\emptyset)=0$
- μ مدولار است: $\mu(U)+\mu(V)=\mu(U\cup V)+\mu(U\cap V)$
- μ یکنوای صعودی است: $U\subseteq V \ \ \to \mu(U)\subseteq\mu(V)$.

تعریف ۸.۲ ([۱۶]). فرض کنید μ یک ارزیابی و f تابعی از X به $\overline{\mathbb{R}}$ باشد. **انتگرال افقی**[۱۳] تابع f بطور مستقیم از ارزیابی μ بصورت

$$\int_X fd\mu=\int_0^\infty f^\mu(r)dr$$

تعریف می‌شود که در آن

$$f^\mu(r)=\mu\left(f^{-1}\left(]r,\infty]\right)\right).$$

از آنجایی که f^μ نزولی یکنوا است لذا می‌بینیم که انتگرال ریمان ناسره $\int_0^\infty f^\mu(r)dr$ وجود دارد و یا همگرا به مقداری متناهی و یا واگرا به ∞ است.

گزاره ۹.۲ ([۱۶]). *برای یک تابع کراندار اندازه‌پذیر $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$، S_انتگرال و انتگرال افقی، هر دو موجود و با هم برابر است.*

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. زیرمجموعه A از P **جهت‌دار**[۱۴] است هرگاه ناتهی بوده و هر زوج از عناصر A، یک کران بالا در A داشته باشند. اگر مجموعه جهت‌دار A، یک سوپریمم داشته باشد آن را با $\bigsqcup^{\uparrow} A$ نشان می‌دهیم.

[۱۲] Valuation
[۱۳] Horizontal integral

تعریف ۱۱.۲. یک **تور**[۱۵] در فضای توپولوژیکی (X,τ)، تابعی مانند

$$f : I \to X$$
$$f(\alpha) = x_\alpha$$

است که در آن I، یک مجموعه جهت‌دار است ومعمولاً با $\{x_\alpha\}$ نشان می‌دهیم. اگر تابع f، یکنوا باشد آن را یک **تور یکنوا**[۱۶] می‌نامیم. مجموعه I، **مجموعه اندیس‌گذار** تور نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۲. یک **مخروط**[۱۷] عبارت است از یک مجموعه مانند $\mathcal{P}$ همراه با یک عمل جمع $(a,b) \mapsto a+b$ و یک ضرب عددی $(\alpha, a) \mapsto \alpha a$ که در آن $\alpha \geq ۰$ و کلیه خواص یک فضای برداری را داشته باشد.

تعریف ۱۳.۲. مجموعه جزئاً مرتب D که هر زیرمجموعه جهت‌دار آن، یک سوپریمم دارد، مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار و یا به اختصار، یک **dcpo** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۲ ([۱۶]). یک **dcpo_مخروط**[۱۸]، عبارت است از یک dcpoی D مجهز به یک عنصر متمایز $۰ \in D$ و یک جمع $+ : D \times D \to D$ و یک ضرب اسکالر $\cdot : \mathbb{R}^+ \times D \to D$، بطوری‌که کلیه خواص یک فضای برداری، بجز خاصیت معکوس جمعی برقرار باشد (در این حالت باید فرض کنیم که برای هر $a \in D$، $۰ \cdot a = ۰$).

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید مجموعه‌های D و E دو dcpo باشند. تابع $f : D \to E$، **(اسکات_) پیوسته** نامیده می‌شود هرگاه یکنوا بوده و برای هر زیرمجموعه جهت‌دار A از D داشته باشیم $f(\bigsqcup^\uparrow A) = \bigsqcup^\uparrow f(A)$. مجموعه همه توابع پیوسته یکنوای نقطه‌وار از D به E را با $[D \longrightarrow E]$ نشان می‌دهیم. توابع بین dcpoهای جهت‌دار که عنصر زیر را حفظ می‌کنند، **اکید** نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۶.۲. فرض کنید D یک dcpo باشد. زیر مجموعه A، **(اسکات_)بسته** است هرگاه یک مجموعه پایینی بوده و تحت سوپریمم زیر مجموعه‌های جهت‌دار، بسته باشد.

تعریف ۱۷.۲. فرض کنید D یک dcpo باشد. **اسکات_توپولوژی**[۱۹] σ_D روی D به

[۱۵] Net
[۱۶] Monotone net
[۱۷] Cone
[۱۸] Dcpo-cone
[۱۹] Scott-topology

صورت زیر تعریف می شود:
مجموعه $O \subseteq D$، **(اسکات ـ) باز** است هرگاه یک مجموعه بالایی بوده و برای هر مجموعه جهت‌دار $A \subseteq D$، رابطه $\bigsqcup^{\uparrow} A \in O$، وجود یک $a \in A \cap O$ را ایجاب کند.

تعریف ۱۸.۲ . توپولوژی لاوسون[۲۰] روی یک dcpo ی D، کوچکترین توپولوژی شامل همه مجموعه‌های اسکات ـ باز و همه مجموعه‌های به فرم $D \backslash \uparrow x$ است.

تعریف ۱۹.۲ ([۱۷]). فضای توپولوژی X، **نرمال** است هرگاه برای هر دو مجموعه بسته و مجزای E_1 و E_2 در X، مجموعه‌های باز A_1 و A_2 وجود داشته باشند، بطوری که مجزا بوده و $E_1 \subseteq A_1$ و $E_2 \subseteq A_2$ باشد.

قضیه ۲۰.۲ (جداسازی اوریسون [۱۷]، قضیه ۱). *فضای توپولوژیک X، نرمال است اگر و تنها اگر برای هر دو زیرمجموعه بسته مجزای $E_1, E_2 \subset X$، تابع حقیقی و پیوسته $0 \leq f \leq 1$ روی X چنان باشد که اگر $x \in E_1$ آنگاه $f(x) = 0$ و اگر $x \in E_2$ آنگاه $f(x) = 1$.*

مثال ۲۱.۲ ([۱۷]). هر فضای هاسدورف فشرده و هر فضای متریک، نرمال است.

تعریف ۲۲.۲ ([۱۷]). فرض کنید E یک مجموعه پیش‌مرتب باشد. زیرمجموعه $E_1 \subseteq E$ **کاهشی**[۲۱] نامیده می‌شود هرگاه $a \leq b$ و $b \in E_1$، رابطه $a \in E_1$ را ایجاب کند. مجموعه افزایشی، بطور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۲۳.۲ ([۱۷]). یک فضای برداری X مجهز به یک پیش‌ترتیب، **بطور نرمال پیش‌مرتب** نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو زیرمجموعه بسته مجزای E_1 و E_2 از X که E_1 کاهشی و E_2 افزایشی است، دو زیرمجموعه باز و مجزای A_1 و A_2 وجود داشته باشد، بطوری که A_1 شامل E_1 و کاهشی و A_2 شامل E_2 و افزایشی باشد.

تعریف ۲۴.۲ ([۱۷]). فضای برداری X **بطور نرمال مرتب** است هرگاه علاوه بر شرایط تعریف ۲۳.۲، پیش‌ترتیب آن، یک ترتیب باشد.

تعریف ۲۵.۲ ([۱۷]). **گراف**[۲۲] یک پیش‌ترتیب روی مجموعه E برابر با مجموعه

[۲۰] Lawson topology
[۲۲] Graph

$$G_E = \{(x,y) \in E \times E : x \leq y\}$$

است.

تعریف ۲.۲۶ ([۱۷]). یک ترتیب روی فضای توپولوژیکی X، **بسته** است هرگاه گراف آن، زیرمجموعه بسته‌ای از فضای توپولوژیک $E \times E$ باشد.

گزاره ۲.۲۷ ([۱۷]). *هر فضای توپولوژیک X مجهز به یک ترتیب بسته، یک فضای هاسدورف است.*

تعریف ۲.۲۸ ([۱۷]). یک **فضای مرتب فشرده**، یک فضای فشرده است که به یک ترتیب بسته مجهز شده باشد.

قضیه ۲.۲۹ ([۱۷]، نتیجه قضیه ۴). *هر فضای مرتب فشرده، یک فضای بطورنرمال مرتب است.*

تعریف ۲.۳۰ ([۴]). زیرمجموعه دلخواه ناتهی A از فضای توپولوژیکی X، **تحویل‌ناپذیر** است هرگاه برای زیرمجموعه‌های بسته B و C، رابطه $A \subseteq B \cup C$، $A \subseteq B$ یا $A \subseteq C$ را ایجاب کند.

تعریف ۲.۳۱ ([۴]). فضای توپولوژیکی X را **متعادل**[۲۳] گوییم هرگاه هر زیرمجموعه تحویل‌ناپذیر بسته از X، بستار یک نقطه یکتا باشد.

تعریف ۲.۳۲ ([۴]). فرض کنید D یک dcpo باشد. برای عناصر $x, y \in D$، می‌گوییم x، **مسیر-پایین**[۲۴] y است یا x، y را **تقریب** می‌زند هرگاه برای همه مجموعه‌های جهت‌دار $A \subseteq D$، $y \leq \bigsqcup^{\uparrow} A$ برای $a \in A$ای، رابطه $x \leq a$ را ایجاب کند و با علامت $x \ll y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳۳ ([۴]). فرض کنید $(X, \mathcal{G})$ یک فضای توپولوژیکی مجهز به ترتیب جزئی $\leq$ باشد. داریم

[۲۳] Sober
[۲۴] Way-below

۱. X، **موضعاً فشرده پایدار**[۲۵] است هرگاه متعادل و موضعاً فشرده بوده و برای هر $G_۱, G_۲, H \in \mathcal{G}$، اگر $H \leq_{\mathcal{G}} G_۱$ و $H \leq_{\mathcal{G}} G_۲$، آنگاه $H \leq_{\mathcal{G}} G_۱ \cap G_۲$؛ به عبارت دیگر، رابطه تقریبی روی $\mathcal{G}$، افزاینده باشد.

۲. X، **فشرده پایدار**[۲۶] است هرگاه فشرده بوده و موضعاً فشرده پایدار باشد.

تعریف ۳۴.۲ ([۷]). فضای توپولوژی X، $T_۰$ است هرگاه برای هر $x \neq y$، وجود داشته باشد مجموعه بازی در X بطوری که دقیقاً شامل یکی از آنها باشد.

تعریف ۳۵.۲ ([۲]). **فضای تابع**[۲۷] L، فضای برداری توابع حقیقی روی مجموعه‌ای ناتهی مانند X است به طوریکه توابع $f \vee g$ و $f \wedge g$ به ازای هر $f, g \in L$، متعلق به L باشند که در آن

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{و} \quad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

قضیه ۳۶.۲ (استون–وایراشتراس[۲۸][۲]، قضیه ۳٫۱۱). *فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد و L فضای تابع توابع پیوسته جداکننده نقاط X بوده و شامل تابع ثابت ۱ باشد. در این صورت، L در $\mathrm{C(X)}$ نسبت به متریک یکنواخت، چگال است.*

تعریف ۳۷.۲ ([۱۳]). مجموعه همه ارزیابی‌های (پیوسته) روی (X, τ)، **دامنه توانی احتمالی**[۲۹] X نامیده می‌شود.

قضیه ۳۸.۲ (باناخ–آلااغلو [۱۹]، قضیه ۱۵٫۳). *اگر V یک همسایگی ۰ در فضای برداری توپولوژیکی X باشد و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq ۱;\ \forall x \in V\}$$

آنگاه K، ضعیف – فشرده است که در آن X^* دوگان فضای برداری توپولوژیکی X است به‌طوریکه عناصر آن، تابعی‌های خطی پیوسته روی X هستند.*

[۲۵] Stably locally compact
[۲۶] Stably compact
[۲۷] Function space
[۲۸] Stone-Weierstraß
[۲۹] Probabilistic Powerdomain

۳ فضاهای توپولوژیکی مرتب

در این بخش، یک فضای توپولوژیکی مرتب جزیی(بطور خلاصه، یک فضای مرتب) را از دیدگاه ناخبین در نظر می‌گیریم، به عبارت دیگر، یک مجموعه X همراه با یک توپولوژی $\mathcal{O}$ و یک ترتیب جزیی $\leq$ به‌طوری که گراف ترتیب در $X \times X$ بسته است. این تعریف معادل این است که بگوییم برای هر دو $x \not\leq y$ در X وجود داشته باشد همسایگی‌های مجزای U از x و V از y که در آن، U یک مجموعه بالایی و V یک مجموعه پایینی است که ایجاب می‌کند فضاهای مرتب، فضاهای هاسدورف باشند.

گردایه $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\uparrow}$ از زیرمجموعه‌های بالایی باز X نیز یک توپولوژی روی X است که توپولوژی پایینی نامیده می‌شود. این توپولوژی پایینی، $T_{\circ}$ است اما هاسدورف نیست.

ما این اصطلاحات را بخصوص برای خط حقیقی گسترش یافته

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

با ترتیب تام معمولی و توپولوژی هاسدورف معمولی τ تولید شده با بازه‌های باز بکار می‌بریم. مجموعه‌های بالایی باز سره، بازه‌های $]r, +\infty]$ هستند. آنها توپولوژی پایینی $\tau^{\uparrow}$ را تشکیل می‌دهند. همچنین ما این اصطلاحات را برای زیرمجموعه‌هایی از $\overline{\mathbb{R}}$، مانند اعداد حقیقی $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$، اعداد حقیقی نامنفی $\mathbb{R}_{+} = [\circ, +\infty[$ و اعداد نامنفی گسترش یافته $\overline{\mathbb{R}}_{+} = [\circ, +\infty]$ بکار می‌بریم.

برای توابع $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$، مفاهیم و اصطلاح‌های زیر را قرارداد می‌کنیم:

$$||g|| := \sup_{x \in X} |g(x)|,$$

و می‌گوییم g کراندار است اگر $||g|| < +\infty$. فضای برداری همه توابع پیوسته کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ با سوپریمم‑نرم $||f||$ را با $\mathrm{C}(X)$ و مخروط مثبت عضوهای نامنفی آن را با $\mathrm{C}_{+}(X)$ نشان می‌دهیم. برای هر $r \in \mathbb{R}$ قرارداد زیر را برای تصویر معکوس در نظر می‌گیریم

$$[g > r] := g^{-1}(]r, +\infty]) = \{x \in X : g(x) > r\}.$$

طبق معمول g نیمه‌پیوسته پایینی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $r \in \mathbb{R}$، $[g > r]$ در X باز باشد. مجموعه همه توابع نیمه‌پیوسته پایینی، کراندار و نامنفی $g : X \to \mathbb{R}_{+}$ را با $\mathrm{LSC}_{+}(X)$ نشان می‌دهیم.

گوییم g یکنوای صعودی یا حافظ ترتیب است هرگاه $x \leq y$، $g(x) \leq g(y)$ را ایجاب کند که معادل اینست که بگوییم برای همه $r \in \mathbb{R}$، $[g > r]$ یک مجموعه بالایی است. توجه می‌کنیم که:

گزاره ۱.۳. *تابع g یکنوای صعودی و نیمه‌پیوسته پایینی است اگر و فقط اگر برای هر $r \in \mathbb{R}$، $[g > r]$ یک مجموعه بالایی باز باشد، به عبارت دیگر، اگر و فقط اگر g متناظر با توپولوژی‌های پایینی $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\uparrow}$ روی X و $\tau^{\uparrow}$ روی $\overline{\mathbb{R}}$ پیوسته باشد.*

از این به بعد، مجموعه همه توابع نامنفی، کراندار، یکنوای صعودی و نیمه‌پیوسته پایینی $g : X \to \mathbb{R}_+$ را با $\mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$ و مجموعه همه توابع پیوسته $g : X \to \mathbb{R}_+$ را با $\mathrm{C}_+(X)$ نشان می‌دهیم.

حال به چند نتیجه در مورد فضاهای مرتب فشرده می‌رسیم. بلافاصله نتیجه می‌شود که سوپریمم (نقطه‌وار) هر خانواده از توابع نیمه‌پیوسته پایینی (یکنوای صعودی)

$$f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

نیز یک تابع نیمه‌پیوسته پایینی (یکنوای صعودی) است. درمورد یک فضای هاسدورف فشرده، هر تابع نیمه پیوسته پایینی، سوپریمم یک خانواده جهت‌دار از توابع پیوسته است. در اینجا تعمیمی برای فضاهای مرتب فشرده آورده می‌شود:

لم ۲.۳. *فرض کنید X یک فضای مرتب فشرده باشد. هر تابع نیمه‌پیوسته پایینی یکنوای صعودی $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$، سوپریمم نقطه‌وار یک خانواده جهت‌دار (f_i) از توابع پیوسته یکنوای صعودی $f_i : X \to \mathbb{R}_+$ است.*

برهان. فرض کنید همواره $g \in \mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$. حال $x_\circ \in X$ و یک rای را طوری انتخاب می‌کنیم که $g(x_\circ) > \circ$ و $\circ \leq r < g(x_\circ)$؛ در این صورت $U = [g > r]$ یک مجموعه بالایی باز شامل $x_\circ$ است. بنا به قضیه ۲۹.۲، یک فضای مرتب فشرده، بطور نرمال مرتب است که از آنجا، بنا به قضیه ۲۰.۲، تابع یکنوای صعودی $f : X \to [\circ, ۱]$ وجود دارد بطوری که برای هر $x \notin U$، $f(x) = \circ$ و $f(x_\circ) = ۱$. تابع $r \cdot f$ یکنوای صعودی و با شرط $rf(x_\circ) = r$ و $r \cdot f \leq g$، پیوسته است. در حقیقت، برای $x \notin U$، $rf(x) = \circ \leq g(x)$ و برای $x \in U$، $rf(x) \leq r < g(s)$. همچنان که می‌توانیم چنین تابعی را برای هر $x_\circ$

با شرط $g(x_\circ) > \circ$ و $\circ \leq r < g(x_\circ)$ بسازیم، نتیجه می‌شود که g سوپریمم نقطه‌وار خانواده‌ای از توابع حقیقی پیوسته یکنوای صعودی نامنفی است. با گرفتن سوپریمم متناهی از چنین توابعی، یک خانواده جهت‌دار با خصوصیات موردنظر بدست می‌آید.

□

مجموعه $\mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ از همه توابع حقیقی پیوسته یکنوای صعودی نامنفی، یک مخروط در $\mathrm{C}(X)$ است. در واقع، برای $f_1, f_2 \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ واضح است که $f_1 + f_2 \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ و همچنین برای هر عدد حقیقی $r \geq \circ$ نیز $rf \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$. بعلاوه، تابع ضربی $f_1 \cdot f_2$ و تابع ثابت ۱ نیز متعلق به مخروط $\mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ است.

لم ۳.۳. *برای فضای مرتب فشرده X، مخروط $\mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ یک فضای برداری مانند $V = \mathrm{C}_+^\uparrow(X) - \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ تولید می‌کند که متناظر با نرم سوپریمم در $\mathrm{C}(X)$، چگال است.*

برهان. (ادواردز[۳۰][۶]) از توضیح داده شده قبل از این لم نتیجه می‌شود که V یک زیرجبر از $\mathrm{C}(X)$ است که شامل تابع ثابت ۱ است. از نتایج ناخبین ذکر شده در اثبات لم قبلی نتیجه می‌شود که برای اعضای $x \not\leq y$ در X، تابعی مانند $f \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ وجود دارد بطوری که $f(x) = 1$ و $f(y) = \circ$. بنابراین $\mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ و همچنین بنا به مطالب فوق، V نقاط X را جدا می‌کند. حال لم، از قضیه استون‌ـ وایراشتراس نتیجه می‌شود. □

۴ مخروط $\mathrm{M}(X)$ از اندازه‌های بورل منتظم

فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و $\mathcal{B}$، σـ جبر مجموعه‌های بورل باشد به عبارت دیگر، σـ جبر تولید شده توسط زیر مجموعه‌های باز X باشد. یادآوری می‌کنیم که یک اندازه بورل روی X، تابعی مانند $m : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ است به طوری که

m اکید است: $m(\emptyset) = \circ$،

m جمع‌پذیر است: اگر $A, B \in \mathcal{B}$ و مجزا باشند، $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$

m، σـ پیوسته است: اگر برای هر دنباله صعودی $A_n \in \mathcal{B}$، $m(\cup_n A_n) = \sup_n m(A_n)$.

توجه داریم که خود را به اندازه‌های مثبت محدود می‌کنیم. چنین اندازه‌ای، منتظم داخلی

[۳۰] Edwards

نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه بورل A داشته باشیم

$$m(A) = \sup\left\{m(K) : K \subseteq A, \ \text{فشرده } K\right\}.$$

منتظم بودن داخلی، فوراً منتظم بودن خارجی را برای هر مجموعه بورل A را ایجاب می‌کند:

$$m(A) = \inf\left\{m(U) : A \subseteq U, \ \text{باز } U\right\}.$$

در ادامه در مورد اندازه‌های بورل منتظم، بطور ساده‌تر صحبت خواهیم کرد.

مجموعه همه اندازه‌های بورل منتظم روی X را با $\mathrm{M}(X)$،

زیرمجموعه همه اندازه‌های بورل با شرط $m(X) \leq ۱$ را با $\mathrm{M}_{\leq ۱}(X)$

و زیرمجموعه اندازه‌های احتمال، به عبارت دیگر $m(X) = ۱$ را با $\mathrm{M}_{۱}(X)$ نشان می‌دهیم.

$\mathrm{M}(X)$ یک مخروط در فضای برداری همه توابع از $\mathcal{B}$ به $\mathbb{R}$ است، به عبارت دیگر، جمع $m_{۱} + m_{۲}$ دو اندازه بورل منتظم و همچنین ضرب اسکالر rm به ازای هر عدد حقیقی نامنفی r نیز یک اندازه بورل منتظم است. زیر مجموعه‌های $\mathrm{M}_{\leq ۱}(X)$ و $\mathrm{M}_{۱}(X)$ محدب هستند. روی $\mathrm{M}(X)$ یک رابطه ترتیبی طبیعی بصورت زیر برای هر مجموعه بورل A وجود دارد:

$$m_{۱} \leq m_{۲} \quad \text{iff} \quad m_{۱}(A) \leq m_{۲}(A).$$

برای فضاهای مرتب فشرده X، رابطه $\prec$ زیر روی $\mathrm{M}(X)$ که ترتیب تصادفی نامیده می‌شود، نیز برای ما برای هر مجموعه بالایی باز U، مفید است:

$$m_{۱} \prec m_{۲} \quad \text{iff} \quad m_{۱}(U) \prec m_{۲}(U).$$

لم زیر یک لم معمولی و آشنا است:

لم ۱.۴. *متناظر با یک اندازه بورل منتظم m، هر تابع نیمه‌پیوسته پایینی کراندار $g : X \to \mathbb{R}_{+}$ انتگرال‌پذیر و دارای انتگرال متناهی $\int f dm$ است که خواص زیر را نیز داراست:*

(i) *برای هر $f, g \in \mathrm{LSC}_{+}(X)$ و هر $r \in \mathbb{R}_{+}$،*

$$\int (f+g)dm = \int f dm + \int g dm, \qquad \int rf dm = r\int f dm,$$

(ii) *برای هر خانواده جهت‌دار* $(g_i)_i$ *در* $\mathrm{LSC}_+(X)$،

$$\int (\sup_i g_i)dm = \sup_i \int g_i dm,$$

(iii) *برای هر خانواده جهت‌دار* $(U_i)_i$ *از مجموعه‌های باز،*

$$m(\cup_i U_i) = \sup_i m(U_i).$$

انتگرال موردنظر می‌تواند توسط انتگرال ریمان زیر تعریف شود:

$$\int gdm = \int_{\circ}^{+\infty} m([g > r])dr.$$

این تعریف، تعریف شوکِه[۳۱] ـ گونه از انتگرال است (کانیگ[۳۲][۱۴]). حال توضیح می‌دهیم که این تعریف چرا منطقی است: فرض کنید $g \in \mathrm{LSC}_+(X)$. به ازای هر r، مجموعه $[g > r]$ باز و یک اندازه $m([g > r]) \in \mathbb{R}_+$ دارد. تابع

$$r \mapsto m([g > r]) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

یکنوای صعودی و برای $r \geq ||g||$، $m([g > r]) = \circ$ چون $[g > r] = \emptyset$؛ بنابراین این تابع انتگرال‌پذیر ریمان است و انتگرال ریمان

$$\int_{\circ}^{+\infty} m([g > r])dr$$

که در واقع یک انتگرال توسعه‌یافته روی بازه متناهی $[\circ, ||g||]$ است، یک عدد حقیقی است. حال خواص لم بالا را می‌توان از خواص انتگرال ریمان نتیجه گرفت.

۵ مخروط $\mathrm{V(X)}$ از ارزیابی‌های پیوسته کراندار

فرض کنید X یک فضای مرتب فشرده، و $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\uparrow}$ مجموعه همه مجموعه‌های بالایی باز باشد. یک ارزیابی روی $\mathcal{G}$ که تابعی مانند $\mu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ است، (اسکات‌ـ)پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر خانواده جهت‌دار از مجموعه‌های بالایی باز $U_i \in \mathcal{G}$ داشته باشیم

$$\mu(\cup_i U_i) = \sup_i \mu(U_i).$$

[۳۱] Choquet
[۳۲] Konig

مجموعه همه ارزیابی‌های پیوسته روی $\mathcal{G}$ را با $\overline{\mathrm{V}}(X)$ نشان می‌دهیم. $\overline{\mathrm{V}}(X)$ را با ترتیب تصادفی که بصورت زیر برای همه مجموعه‌های باز $U \in \mathcal{G}$، تعریف می‌شود، مجهز می‌کنیم

$$\mu \prec \nu \quad \text{iff} \quad \mu(U) \leq \nu(U).$$

برای ارزیابی‌های پیوسته، همچنین یک جمع و یک ضرب با استفاده از اسکالرهای نامنفی r، بصورت $(\mu+\nu)(U) = \mu(U) + \nu(U)$ و $(r\mu)(U) = r\mu(U)$ تعریف می‌کنیم.
(در اینجا قرارداد می‌کنیم که $0 = (+\infty) \cdot 0$، همانطور که در نظریه اندازه معمول است).

مجموعه همه ارزیابی‌های پیوسته کراندار، یعنی $\mu(X) < +\infty$، را با $\mathrm{V}(X)$،

مجموعه همه ارزیابی‌های زیرـ احتمال، به عبارت دیگر، $\mu(X) \leq 1$ را با $\mathrm{V}_{\leq 1}(X)$

و مجموعه همه ارزیابی‌های احتمال، به عبارت دیگر، $\mu(X) = 1$ را با $\mathrm{V}_1(X)$ نشان می‌دهیم.

توجه داریم که $\mathrm{V}(X)$ یک مخروط در فضای برداری همه توابع از $\mathcal{G}$ به $\mathbb{R}$ بوده و اینکه $\mathrm{V}_{\leq 1}(X)$ و $\mathrm{V}_1(X)$ زیرمجموعه‌های محدب هستند.

با توجه به تابع حقیقی‌مقدار نیمه‌پیوسته پایینی کراندار $g : X \to \mathbb{R}_+$، می‌توانیم متناظر با ارزیابی پیوسته μ، انتگرال یک تابع نیمه‌پیوسته پایینی یکنوای صعودی کراندار $g : X \to \mathbb{R}_+$ را تعریف کنیم. همواره برای هر r، پیش نگاره $[g > r] = g^{-1}(]r, +\infty[)$ یک مجموعه بالایی باز است. بنابراین $\mu([g > r])$ یک عدد حقیقی نامنفی خوش‌تعریف است. علاوه بر این، تابع $r \mapsto \mu([g > r]) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ یکنوای نزولی و نیمه‌پیوسته بالایی است. بنابراین انتگرال ریمان آن، $\int_0^{+\infty} \mu([g > r])dr$، یک عدد حقیقی خوش‌تعریف است. توجه کنید که در واقع انتگرال، فقط روی بازه متناهی $[0, ||g||]$ توسعه یافته است، همان‌طور که برای $r \geq ||g||$، $\mu([g > r]) = 0$. تعریف می‌کنیم

$$\int g d\mu := \int_0^{+\infty} \mu([g > r])dr.$$

حال از خواص انتگرال ریمان برای توابع یکنوا، می‌توان خواص زیر را نتیجه گرفت:

لم ۱.۵. *نگاشت $(\mu, f) \mapsto \int f d\mu : \mathrm{V}(X) \times \mathrm{LSC}_+^{\uparrow} \to \mathbb{R}_+$ یکنوای صعودی است، سوپریمم جهت‌دار را حفظ می‌کند و در هر یک از دو مؤلفه‌هایش، بطور جداگانه خطی است.*

برهان. اثبات سرراست، اما خسته‌کننده است. فرض می‌کنیم که $I(f,\mu) = \int_X f d\mu$ و $f \in \mathrm{LSC}(X,\overline{\mathbb{R}}_+)$ باشد؛ به عبارت دیگر، f عضو مجموعه همه توابع نیم‌پیوسته پایینی از X به $\overline{\mathbb{R}}_+$ باشد و همچنین $\mu,\nu \in \mathrm{V}(X)$ باشد. ابتدا لم زیر را می‌آوریم که در [۱۶] آمده است:

لم ۲.۵. *تابع $I(f,\mu) = \int_X f d\mu$ در هر یک از مؤلفه‌هایش، اسکات‌ــ پیوسته بوده و بنابراین از توپولوژی اسکات روی حاصلضرب $\mathrm{LSC}(X,\overline{\mathbb{R}}_+) \times \mathrm{V}(X)$ بتوی $\mathbb{R}$، اسکات‌ــ پیوسته است.*

اما اثبات لم ۱.۵. بنا به مطالب فوق می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f^{\mu+\nu}(r) = (\mu+\nu)\left(f^{-1}\left(]r,\infty]\right)\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(]r,\infty]\right)\right) + \nu\left(f^{-1}\left(]r,\infty]\right)\right) \\ &= f^{\mu}(r) + f^{\nu}(r) \end{aligned}$$

و بنابراین بنا به خاصیت جمع‌پذیری انتگرال ریمان ناسره برای توابع نامنفی،

$$\begin{aligned} \int_X f d(\mu+\nu) = \int_0^\infty f^{\mu+\nu}(r)dr &= \int_0^\infty f^{\mu}(r)dr + \int_0^\infty f^{\nu}(r)dr \\ &= \int_X f d\mu + \int_X f d\nu. \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت مورد نظر، جمع‌پذیر است. استدلال مشابه، همگن بودن را ثابت می‌کند.

از طرف دیگر، فرض کنید $f,g \in \mathrm{LSC}(X,\overline{\mathbb{R}}_+)$ و $\mu \in \mathrm{V}(X)$. اگر f,g,μ هر سه کراندار باشند آنگاه جمع‌پذیری و همگن بودن در مؤلفه اول، بنا به خاصیت خطی بودن انتگرال ریمان‌ــ اشتیلیس و گزاره ۹.۲ نتیجه می‌شود. اگر μ کراندار ولی f,g کراندار نباشند، آنگاه جمع‌پذیری را می‌توان با استفاده از دنباله‌های کانونی از توابع ساده (و بنابراین کراندار) همگرا به f,g، و همچنین با توجه به

$$\begin{aligned} I(f+g,\mu) &= \sup\{I(f_n+g_n,\mu):\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= \sup\{I(f_n,\mu):\ n\in\mathbb{N}\} + \sup\{I(g_n,\mu):\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= I(f,\mu)+I(g,\mu), \end{aligned}$$

نتیجه گرفت که در آن، تساوی اولی و آخری از خاصیت dcpoــ مخروط و لم ۲.۵ و تساوی وسطی از خاصیت جمع‌پذیری روی توابع کراندار و جهت‌دار بودن دنباله‌های $I(f_n,\mu)$ و $I(g_n,\mu)$، نتیجه شده است.

اگر μ کراندار نباشد، دنباله جهت‌داری از ارزیابی‌های کراندار μ_n با سوپریمم μ در نظر می‌گیریم؛ آنگاه با توجه به قسمت قبل داریم:

$$\begin{aligned} I(f+g,\mu) &= \sup\{I(f+g,\mu_n):\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= \sup\{I(f,\mu_n):\ n\in\mathbb{N}\}+\sup\{I(g,\mu_n):\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= I(f,\mu)+I(g,\mu), \end{aligned}$$

همگن بودن در مؤلفه اول، بطور مشابه نتیجه می‌شود. □

در ادامه، قسمتی از این لم را برای اثبات لم زیر بکار می‌بریم:

لم ۳.۵. *فرض کنید $(X,\mathcal{O},\leq)$ یک فضای مرتب فشرده باشد. برای تور $(\mu_j)_{j\in J}$ از ارزیابی‌های پیوسته کراندار و ارزیابی پیوسته کراندار μ روی $\mathcal{G}=\mathcal{O}^{\uparrow}$، احکام زیر معادلند:*

(i) *برای هر مجموعه بالایی باز U*، $\mu(U)\leq \liminf_j \mu_j(U)$

(ii) *برای هر* $f\in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$، $\int f d\mu \leq \liminf_j \int f d\mu_j$

(iii) *برای هر* $g\in \mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$، $\int g d\mu \leq \liminf_j \int g d\mu_j$.

برهان. واضحاً (iii) ⇐ (ii) برقرار است. به علاوه (iii) ⇐ (i) نیز برقرار است چون تابع مشخصه χ_U از هر مجموعه بالایی باز U نیمه پیوسته پایینی و صعودی است و همچنین $\int \chi_U d\mu=\mu(U)$. برای اثبات (ii) ⇐ (iii) بنا به لم ۲.۳، هر $g\in \mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$ سوپریمم یک خانواده جهت‌دار از توابع پیوسته یکنوای صعودی $f_i: X\to \mathbb{R}_+$ است. و در آخر طبق فرض (ii) داریم $\int f_i d\mu\leq \liminf_j \int f_i d\mu_j$. چون $f_i\leq g$ لذا برای هر i، $\liminf_j \int f_i d\mu_j \leq \liminf_j \int g d\mu_j$، که از آنجا

$$\int g d\mu=\int \sup_i f_i d\mu=\sup_i \int f_i d\mu \leq \sup_i \liminf_j \int f_i d\mu_j$$

که همان هدف مورد نظر است. توجه داریم که از این واقعیت استفاده کردیم که $f\mapsto \int f d\mu$ بنا به لم ۱.۵، سوپریمم جهت‌دار را حفظ می‌کند. (i) ⇐ (iii) با روشی مشابه و با استفاده از این حقیقت که هر $g\in \mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$ سوپریمم دنباله صعودی g_n زیر از

ترکیب‌های خطی متناهی از توابع مشخصه از مجموعه‌های بالایی باز است، اثبات می‌شود:

$$g_n = \frac{۱}{۲^n} \sum_{i=۱}^{n۲^n} \chi_{[g > \frac{i}{۲^n}]} \,.$$

$\square$

اگر تور ثابت $\mu = \nu$ را در نظر بگیریم، لم قبلی، نتیجه زیر را بدست می‌دهد:

نتیجه ۴.۵. *فرض کنید $(X, \mathcal{O}, \leq)$ یک فضای مرتب فشرده باشد. برای ارزیابی‌های پیوسته μ و ν روی $\mathcal{O}$، احکام زیر معادلند:*

(i) $\mu \prec \nu$، *به عبارت دیگر به ازای هر مجموعه بالایی باز* U، $\mu(U) \leq \nu(U)$.

(ii) *به ازای هر* $f \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$، $\int f d\mu \leq \int f d\nu$

(iii) *به ازای هر* $g \in \mathrm{LSC}_+^{\uparrow}(X)$، $\int g d\mu \leq \int g d\nu$.

۶ مخروط $\mathrm{C}_+^*(X)$ از تابعی‌های خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$

فرض کنید X، در سراسر این بخش، یک فضای مرتب فشرده باشد. همچنین دوگان فضای برداری همه توابع حقیقی پیوسته، $\mathrm{C}(X)$، روی فضای باناخ X و نسبت به سوپریمم‌ـ نرم را با $\mathrm{C}^*(X)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر فضای برداری همه تابعی‌های خطی کراندار φ روی $\mathrm{C}(X)$ را با $\mathrm{C}^*(X)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک تابعی خطی φ روی $\mathrm{C}(X)$، مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f \in \mathrm{C}(X)$ داشته باشیم $\varphi(f) \geq ۰$. هر تابعی خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$ نسبت به سوپریمم‌ـ نرم، کراندار بوده و هر تابعی خطی کراندار روی $\mathrm{C}(X)$ بصورت تفاضل دو تابعی خطی مثبت، قابل نمایش است.

در اینجا مخروط مثبت همه تابعی‌های خطی مثبت $\varphi \in \mathrm{C}^*(X)$ را با $\mathrm{C}_+^*(X)$،
زیرمجموعه محدب از تابعی‌های خطی مثبت با شرط $\varphi(۱) \leq ۱$ را با $\mathrm{C}_{\leq ۱}^*(X)$
و زیرمجموعه محدب از تابعی‌های خطی مثبت با شرط $\varphi(۱) = ۱$ را با $\mathrm{C}_۱^*(X)$
نشان می‌دهیم.

در ارتباط با فضای دوگان $\mathrm{C}^*(X)$ دو نوع ترتیب وجود دارد: ترتیب اولی، ترتیب معمولی داده شده با استفاده از مخروط مثبت $\mathrm{C}_+(X)$ است، به عبارت دیگر

$$\varphi \leq \psi \quad \text{iff} \quad \psi - \varphi \in \mathrm{C}_+^*(X) \quad \text{iff} \quad \varphi(f) \leq \psi(f), \qquad \forall f \in \mathrm{C}_+(X),$$

ترتیب دومی، ترتیب تصادفی داده شده با استفاده از مخروط $\mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ از توابع پیوسته یکنوای صعودی کراندار نامنفی است، به عبارت دیگر،

$$\varphi \prec \psi \quad \text{iff} \quad \varphi(f) \leq \psi(f), \qquad \forall f \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X).$$

واضح است که $\prec$ بازتابی و متعدی است. در ادامه می‌بینیم که $\prec$، پادمتقارن نیز می‌باشد.
درمورد فضای برداری دوگان $\mathrm{C}^*(X)$، دو نوع توپولوژی در نظر می‌گیریم. اولین توپولوژی، ضعیف*ـ توپولوژی است، به عبارت دیگر ضعیف‌ترین توپولوژیی که نگاشت‌های

$$\varphi \to \varphi(f) : \mathrm{C}^*(X) \to \mathbb{R}$$

به ازای هر $f \in \mathrm{C}_+(X)$ پیوسته باشند.
دومین توپولوژی، ضعیف**ـ توپولوژی نامیده می‌شود که طبق تعریف، ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathrm{C}^*(X)$ است بطوری که نگاشت‌های

$$\varphi \to \varphi(f) : \mathrm{C}^*(X) \to \mathbb{R}$$

فقط به ازای هر $f \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ پیوسته باشند. بنابراین، ضعیف**ـ توپولوژی درشت‌تر (ضعیف‌تر) از ضعیف**ـ توپولوژی است. روی $\mathrm{C}^*(X)$، ضعیف**ـ توپولوژی اکیداً درشت‌تر از ضعیف*ـ توپولوژی است.

گزاره ۱.۶. *برای فضای مرتب فشرده X داریم:*

(۱) *ترتیب تصادفی $\prec$ همواره پادمتقارن بوده و ضعیف** ـ توپولوژی، هاسدورف است.*

(۲) *ترتیب معمولی $\leq$ و ترتیب تصادفی $\prec$ روی $\mathrm{C}^*(X)$، ضعیف* ـ بسته‌اند.*

(۳) *زیرمجموعه‌های $\mathrm{C}_{\leq 1}^*(X)$ و $\mathrm{C}_1^*(X)$، مجموعه‌های محدب ضعیف* ـ فشرده‌اند.*

(۴) *ضعیف** ـ توپولوژی و ضعیف* ـ توپولوژی روی $\mathrm{C}_+^*(X)$ با هم مطابقت می‌کنند.*

(۵) *مجموعه‌های $\mathrm{C}^*_{\le 1}(X)$ و $\mathrm{C}^*_1(X)$ نسبت به ترتیب تصادفی $\prec$ و یا یکی از توپولوژی‌های ضعیف، فضاهای مرتب محدب فشرده هستند.*

برهان. (۱) اگر X یک فضای مرتب فشرده باشد، آنگاه فضای برداری V تولید شده بوسیله مخروط $\mathrm{C}^{\uparrow}_{+}(X)$ از توابع پیوسته یکنوای صعودی نامنفی، بنا به ۳.۳، بطور یکنواخت در $\mathrm{C}(X)$ چگال است و این ایجاب می‌کند که $\prec$ همواره پادمتقارن بوده و ضعیف** ــ توپولوژی، هاسدورف باشد.

(۲) فرض کنید φ_j و ψ_j تورهایی از تابعی‌های خطی کرانداری باشند که ضعیف * ــ همگرا به ترتیب به φ و ψ باشند بطوری که برای هر j، $\varphi_j \prec \psi_j$. آنگاه به ازای هر $f \in \mathrm{C}^{\uparrow}_{+}(X)$ داریم $\varphi_j(f) \le \psi_j(f)$ و همچنین چون $\varphi_j(f)$ و $\psi_j(f)$ به ترتیب به $\varphi(f)$ و $\psi(f)$ همگرا هستند، لذا نتیجه می‌گیریم که $\varphi(f) \le \psi(f)$، که از آنجا $\varphi \prec \psi$. اثبات برای ترتیب $\le$، مشابه است.

(۳) با استفاده از این واقعیت که هر زیرمجموعه بسته یک مجموعه فشرده، فشرده است و استفاده مستقیم از قضیه آلاغلو [۳۳] ثابت می‌شود.

(۴) ضعیف ** ــ توپولوژی محدود شده به $\mathrm{C}^*_{\le 1}(X)$ بنا به (۱) هاسدورف و درشت‌تر از ضعیف * ــ توپولوژیی بوده که روی $\mathrm{C}^*_{\le 1}(X)$ فشرده است. از آنجا که توپولوژی هاسدورفی وجود ندارد که اکیداً درشت‌تر از توپولوژی فشرده باشد، لذا ضعیف * ــ توپولوژی و ضعیف ** ــ توپولوژی روی $\mathrm{C}^*_{\le 1}(X)$ با هم مطابقت می‌کنند. از طرفی چون $\mathrm{C}^*_{+}(X)$ برابر با اجتماع زیر مجموعه‌های باز $n\mathrm{C}^*_{<1}(X)$، $n \in \mathrm{N}$، خودش است و نیز چون دو توپولوژی فوق روی این زیرمجموعه‌های باز با هم مطابقت می‌کنند، لذا روی $\mathrm{C}^*_{+}(X)$ نیز با هم مطابقت می‌کنند.

(۵) از آنجا که رابطه $\prec$ بنا به (۲) بسته است لذا بنا به (۳)، $\mathrm{C}^*_{\le 1}(X)$ و $\mathrm{C}^*_1(X)$، مجموعه‌های محدب ضعیف * ــ فشرده‌اند و لذا بنا به (۴) و استفاده از این واقعیت که هر زیرمجموعه بسته یک مجموعه فشرده، فشرده است، حکم ثابت می‌شود. □

برای هر $x \in X$، تابعی دیراک[۳۴] δ_x که بصورت $f \mapsto f(x)$ تعریف می‌شود، یک تابعی خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$ است. برای یک فضای فشرده هاسدورف، $x \mapsto \delta_x$ یک

[۳۳] Alaoglu
[۳۴] Dirac

نشاننده توپولوژیکی از فضای X به $\mathrm{C}^*(X)$ مجهز به ضعیف * ـ توپولوژی است. در واقع، تابعی‌های δ_x دقیقاً نقاط حدی $\mathrm{C}^*_1(X)$ هستند.
بعلاوه داریم:

گزاره ۲.۶. *فرض کنید X یک فضای مرتب فشرده باشد. متناظر با هر $x \in X$، تابعی دیراکش، δ_x، یک نشاننده ترتیبی و توپولوژیکی از فضای X به $\mathrm{C}^*(X)$ مجهز به ضعیف** ـ توپولوژی و ترتیب تصادفی$\prec$، را نتیجه می‌دهد.*

برهان. کافیست فقط نشان دهیم که یک نشاننده ترتیبی داریم. اگر $x \leq y$، آنگاه برای هر $f \in \mathrm{C}^\uparrow_+(X)$، داریم $\delta_x(f) = f(x) \leq f(y) = \delta_y(f)$، که از آنجا $\delta_x \prec \delta_y$. از طرف دیگر اگر $x \nleq y$، آنگاه بنا به قضیه جدا سازی اوریسون وجود دارد یک $f \in \mathrm{C}^\uparrow_+(X)$ بطوری که $f(x) = ۱$ اما $f(y) = ۰$، به عبارت دیگر، $\delta_x(f) = ۱ \nleq ۰ = \delta_y(f)$ و درنتیجه $\delta_x \not\prec \delta_y$.

□

۷ نتایج اصلی

در سه بخش قبل، ما روی سه نوع مخروط، مخروط $\mathrm{M}(X)$ از اندازه‌های بورل منتظم، مخروط $\mathrm{V}(X)$ از ارزیابی‌های پیوسته کراندار و مخروط $\mathrm{C}^*_+(X)$ از تابعی‌های خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$، بحث کردیم. حال نشان خواهیم داد که برای یک فضای مرتب فشرده X، همه این مخروط‌ها، با هم یکریخت هستند و همچنین نشان می‌دهیم که این یکریختی‌ها، یکریختی‌های ترتیبی برای ترتیب تصادفی$\prec$ که برای هر کدام از این مخروط‌ها تعریف شد، نیز هستند.

ابتدا یک نگاشت از $\mathrm{M}(X)$ به $\mathrm{V}(X)$ تعریف می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که هر اندازه بورل منتظم m روی یک فضای مرتب X، یک ارزیابی پیوسته را روی مجموعه $\mathcal{G}$ از مجموعه‌های بالایی باز، تنها با تحدید m به $\mathcal{G}$ القا می‌کند. همواره $m(\emptyset) = ۰$ و از خاصیت جمع‌پذیر متناهی بودن m نتیجه می‌شود که m روی مجموعه‌های بورل، مدولار و پیوسته یکنوا است که نتیجه می‌شود که $m|_{\mathcal{G}}$ یک ارزیابی است. پیوسته بودن $m|_{\mathcal{G}}$ از ۳.۳(۳) نتیجه می‌شود. بنابراین نگاشت $m \mapsto m|_{\mathcal{G}} : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{V}(X)$ بدست می آید. این نگاشت، عمل جمع،

عمل ضرب با اسکالرهای نامنفی، و ترتیب تصادفی $\succ$ راکه فوراً از تعاریف نتیجه می‌شود، را حفظ می‌کند. در این رابطه داریم:

لم ۱.۷. *فرض کنید X یک فضای مرتب فشرده باشد. برای هر اندازه بورل منتظم m روی X، تحدید آن به مجموعه $\mathcal{G}$ از مجموعه‌های بالایی باز، یک ارزیابی پیوسته کراندار بوده، و نگاشت*

$$M : m \mapsto m|_{\mathcal{G}} : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{V}(X)$$

خطی بوده و متناظر با ترتیب تصادفی $\succ$، یکنوای صعودی است.

حال یک نگاشت از $\mathrm{M}(X)$ به $\mathrm{C}^*_+(X)$ تعریف می‌کنیم. انتگرال‌گیری نسبت به یک اندازه بورل منتظم m، یک تابعی خطی مثبت

$$\psi_m : f \mapsto \int f dm$$

روی $\mathrm{C}(X)$ تعریف می‌کند. به علاوه، $m \mapsto \psi_m : \mathrm{M} \to \mathrm{C}^*_+(X)$ خطی است. برای یک فضای هاسدورف فشرده، قضیه نمایش ریس[۳۵] (به عنوان مثال، [۱۸] را ببینید) بیان می‌کند که:

لم ۲.۷. *فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده باشد. آنگاه برای هر تابعی خطی مثبت φ روی $\mathrm{C}(X)$، اندازه بورل منتظم یکتای m وجود دارد بطوری که*

$$\varphi(f) = \int f dm, \quad \forall f \in \mathrm{C}(X)$$

و در نتیجه، نگاشت

$$\psi : m \mapsto \psi_m : \mathrm{M}(X) \to \mathrm{C}^*_+(X)$$

یک یکریختی از مخروط‌ها است.

حال در آخر یک نگاشت از $\mathrm{V}(X)$ به $\mathrm{C}^*_+(X)$ تعریف می‌کنیم. در این حالت نیز مشابه اندازه‌ها، می‌خواهیم نشان دهیم که هر ارزیابی پیوسته μ روی گردایه $\mathcal{G}$ از مجموعه‌های بالایی باز، یک تابعی خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$ تعریف می‌کند.

[۳۵] Riesz Representation Theorem

لم ۳.۷. *فرض کنید X یک فضای مرتب فشرده باشد. برای هر اندازه پیوسته کراندار μ روی مجموعه $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\uparrow}$ از مجموعه‌های بالایی باز، یک تابعی خطی مثبت یکتای φ_μ روی $\mathrm{C}(X)$ وجود دارد بطوری که برای هر $f \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ داریم $\varphi_\mu(f) = \int f d\mu$. همچنین نگاشت*

$$\varphi : \mu \mapsto \varphi_\mu : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{C}_+^*(X)$$

خطی بوده و یک نشاننده ترتیبی برای ترتیب تصادفی $\succ$ است.

برهان. بنا به لم ۱.۵، نگاشت $f \mapsto \int f d\mu$ روی $\mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ خطی است. به ازای $h = f_1 - f_2$ که در آن $f_1, f_2 \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$، تعریف می‌کنیم $\varphi_\mu(h) = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$. این کار یک تابعی خطی خوش‌تعریف روی فضای برداری $V = \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X) - \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ تعریف می کند. این تابعی خطی، مثبت است زیرا به ازای هر تابع نامنفی $h \in V$، $\varphi_\mu(h) \geq 0$. در حقیقت اگر $h = f_1 - f_2 \geq 0$، آنگاه $f_2 \leq f_1$، که از آنجا $\int f_2 d\mu \leq \int f_1 d\mu$ و در نتیجه $\varphi_\mu(h) = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu \geq 0$.

چنانچه تابع ثابت ۱ متعلق به V باشد، آنگاه یک تابعی خطی مثبت روی V نسبت به سوپریمم‌ـ نرم، کراندار است در واقع

$$\| \varphi_\mu \| = \varphi_\mu(1) = \int 1 d\mu = \mu(X).$$

همان‌طور که V در $\mathrm{C}(X)$ بنا به لم ۳.۳ بطور یکنواخت چگال است لذا φ_μ یک توسیع یکتا به یک تابعی خطی مثبت روی $\mathrm{C}(X)$ دارد؛ این توسیع را دوباره با φ_μ نشان می‌دهیم. بنابراین نگاشت $\mu \mapsto \varphi_\mu : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{C}_+^*(X)$ را بدست می‌آوریم. از خاصیت خطی بودن نگاشت $(\mu, f) \mapsto f d\mu$ در مؤلفه اول (لم ۱.۵ را ببینید) نتیجه می‌شود نگاشت $\mu \mapsto \varphi_\mu$ خطی است. از نتیجه ۴.۵ نتیجه می‌شود که این نگاشت یک نشاننده ترتیبی نسبت به ترتیب تصادفی است. □

حال برای فضای مرتب فشرده X، نمودار زیر را داریم

این نمودار جابجایی است، به عبارت دیگر، $\psi = \varphi \circ M$. در حقیقت فرض کنید m یک اندازه بورل منتظم روی X باشد و $\mu = M(m) = m|_{\mathcal{G}}$. باید ثابت کنیم که $\psi_m = \varphi_\mu$. فرمول‌های مربوط به انتگرال‌ها در بخش ۴ و ۵ نشان می‌دهند که $\int f dm = \int f d\mu$، که از آنجا، برای هر $f \in \mathrm{C}_+^{\uparrow}(X)$ نتیجه می‌شود که $\psi_m(f) = \varphi_\mu(f)$. از آنجا که فضای برداری

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(X) \arrow[rr, "m \mapsto m|\mathcal{G}", "M"'] \arrow[dr, "\mathscr{E}"'] & & \mathbf{V}(X) \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \mathrm{C}^*_+(X) &
\end{tikzcd}$$

تولید شده بوسیله $\mathrm{C}^{\uparrow}_+(X)$ بطور یکنواخت در $\mathrm{C}(X)$ چگال است لذا نتیجه می‌گیریم که $\psi_m = \varphi_\mu$.

حال می‌توانیم مطالب را خلاصه کنیم:

قضیه ۴.۷. *فرض کنید $(X, \mathcal{O}, \leq)$ یک فضای مرتب فشرده باشد.*

(i) *هر ارزیابی پیوسته کراندار μ تعریف شده روی گردایه $\mathcal{G} = \mathcal{O}^{\uparrow}$ از مجموعه‌های بالا یی باز، می‌تواند به یک اندازه بورل منتظم $\overline{\mu}$ روی X بطور یکتا، گسترش یابد.*

(ii) *نگاشت‌های $\mu \mapsto \overline{\mu} : \mathrm{V}(\mathcal{G}) \to \mathrm{M}(X)$ و $\mu \mapsto \varphi_\mu : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{C}^*_+(X)$، نسبت به ترتیب‌های تصادفی $\prec$ مربوطه، یکریختی‌هایی از مخروط‌ها، و یکریختی‌های ترتیبی هستند. زیرمجموعه محدب $\mathrm{V}_{\leq ۱}(X)$ بروی $\mathrm{C}^*_{\leq ۱}(X)$ و $\mathrm{M}_{\leq ۱}(X)$ به ترتیب نگاشته می‌شود، و $\mathrm{V}_۱(X)$ به ترتیب بروی $\mathrm{C}^*_۱(X)$ و $\mathrm{M}_۱(X)$ نگاشته می‌شود.*

(iii) *متناظر با ترتیب تصادفی $\prec$ و ضعیف‌ترین توپولوژیی که برای آن، نگاشت‌های $\mu \mapsto \int f d\mu : \mathrm{V}(X) \to \mathbb{R}$ برای هر $f \in \mathrm{C}^{\uparrow}_+(X)$ پیوسته هستند، زیرمجموعه‌های $\mathrm{V}_{\leq ۱}(X)$ و $\mathrm{V}_۱(X)$ فضاهای مرتب فشرده هستند.*

(iv) *فضای مرتب فشرده X، با نگاشته شدن هر $x \in X$ به ارزیابی نقطه‌ای δ_x، توپولوژیکی و نشانده شده ترتیبی در $\mathrm{V}_۱(X)$ است.*

(v) *گردایه مجموعه‌های بالایی باز فضاهای مرتب فشرده $\mathrm{V}_{\leq ۱}(X)$ و $\mathrm{V}_۱(X)$، با ضعیف‌ترین توپولوژیی که برای آن، نگاشت‌های $\mu \mapsto \mu(U)$ به ازای همه مجموعه‌های بالایی باز $U \subseteq X$ نیمه‌پیوسته پایینی هستند، منطبق می‌شوند.*

برهان. (i) در لم ۳.۷ دیدیم که یک ارزیابی پیوسته کراندار μ روی $\mathcal{G}$، یک تابعی خطی مثبت یکتای φ_μ تعریف می‌کند بطوری که برای هر $f \in \mathrm{C}^{\uparrow}_+(X)$ داشته باشیم $\varphi_\mu(f) = \int f d\mu$.

بنا به قضیه نمایش ریس و ۲.۷، اندازه بورل منتظم یکتای $\overline{\mu}$ وجود دارد بطوری که برای هر $f \in \mathrm{C}(X)$ داریم $\varphi_\mu(f) = \int f d\overline{\mu}$. بنابراین، $\overline{\mu}$ اندازه بورل منتظم یکتایی است که برای هر $f \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$، $\int f d\overline{\mu} = \int f d\mu$. برای یک مجموعه بالایی باز U، تابع مشخصه χ_U، نیمه‌پیوسته پایینی است. بنا به لم ۲.۳، χ_U سوپریمم نقطه‌وار خانواده جهت‌دار توابع $f_i \in \mathrm{C}_+^\uparrow(X)$ است. بنابراین

$$\overline{\mu}(U) = \int \chi_U d\overline{\mu} = \sup_i \int f_i d\overline{\mu} = \sup_i \int f_i d\mu = \int \chi_U d\mu = \mu(U)$$

(در اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که $f \mapsto \int f d\overline{\mu}$ و $f \mapsto \int f d\mu$ سوپریمم خانواده‌های جهت‌دار را حفظ می‌کنند(۱.۴ و ۱.۵ را ببینید)). این (i) را ثابت می‌کند.

(ii) از آنجا که $\psi = \varphi \circ M$، وبنا به ۲.۷، ψ دوسویی است، لذا نتیجه می‌گیریم که φ پوشا است. از آنجا که φ بنا به ۳.۷ یک نشاننده ترتیبی و لذا یک به یک است، لذا نتیجه می‌گیریم که φ، دوسویی نیز هست و چون $M = \psi \circ \varphi^{-1}$، لذا M نیز دوسویی است.

(iii) از گزاره ۱.۶ و با استفاده از (ii) نتیجه می‌شود.

(iv) از ۲.۶، و (v) از لم ۳.۵ نتیجه می‌شود. □

قسمت‌های مختلف قضیه قبل، قبلاً ثابت شده‌اند. قسمت (i) مربوط به لاوسون [۱۵] است. برای دامنه‌های فشرده لاوسون، جانگ و تیکس[۳۶] [۱۳] نشان داده‌اند که دامنه‌های توانی احتمالی $\mathrm{V}_{\leq 1}(X)$ و $\mathrm{V}_1(X)$، باز، فشرده لاوسون هستند. این حالت خاصی از قسمت (iii) قضیه قبل است. همچنین ام. آلوارزـمانیلا [۳۷] [۴، ۳]، پی برده است که ترتیب $\prec$ برای ارزیابی‌ها، بیشتر با ترتیب تصادفی اندازه‌های احتمال، که پیش از این توسط دی.ای. ادوارد در سال ۱۹۷۰ مطرح شده، ارتباط دارد [۶]. او نشان داده است که برای فضای مرتب فشرده X، $\mathrm{M}_{\leq 1}(X)$ و $\mathrm{M}_1(X)$، فضاهای مرتب فشرده هستند. قسمت (v) از قضیه ایجاب می‌کند که برای یک فضای فشرده پایدار X، دامنه های توانی احتمالی $\mathrm{V}_{\leq 1}(X)$ و $\mathrm{V}_1(X)$ باز دوباره فشرده پایدار باشند. این امر همچنین توسط آلوارزـمانیلا ثابت شده است [۴].

---
[۳۶] Jung and Tix
[۳۷] M.Alvarez-Manilla

مراجع

[1] S. Abramsky, A. Jung, *Domain theory*, in: S. Abramsky, D.M. Gabbay, T.S.E. Maibaum (Eds.), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 3, Clarendon Press, Oxford, 1994, pp. 1–68. 2

[2] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis*. Academic Press. 1998, xii+415 pp. 9

[3] M. Alvarez-Manilla, *Measure theoretic results for continuous valuations on partially ordered spaces*, Dissertation, Imperial College, London, 2000. 25

[4] M. Alvarez-Manilla, *Extension of valuations on locally compact sober spaces*, Topology and its Applications, 124, 2002 397-433. 8, 25

[5] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1986.

[6] D.A. Edwards, *On the existence of probability measures with given marginals*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble 28 1978, 53–78. 12, 25

[7] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, and D.S. Scott. *Continuous Lattices and Domains*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 93, Cambridge University Press, 2003, xxxvi+591pp. 1, 9

[8] P. Halmos, *Measure Theory*, D. Van-Nostrand Company, 1950.

[9] C. Jones, *Probabilistic Non-Determinism*. PhD thesis, University of Edinburgh, Edinburgh, 1990. Also published as Technical Report No. CST-63-90. 1

[10] A. Jung, *Cartesian Closed Categories of Domains*, volume 66 of CWI Tracts. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989, 107 pp. 2

[11] A. Jung, M. Kegelmann, and M.A. Moshier, *Multi lingual sequent calculus and coherent spaces*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 6, 1997. 2

[12] K. Keimel, *The Probabilistic Powerdomain for Stably Compact Spaces via Compact Ordered Spaces*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 87, 2004 225–238. 1

[13] A. Jung and R. Tix, *The troublesome probabilistic powerdomain*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 13, 1998. 5, 9, 25

[14] H. K¨onig, *Measure and Integration*, Springer–Verlag, 1997, xxi+260 pp. 14

[15] J.D. Lawson, *Valuations on continuous lattices*. In: Math. Arbeitspapiere 27, Univ. Bremen, 1982, Ed. R.-E. Hoffmann, 204–225. 25

[16] J.D. Lawson, *Domains, Integration, and Positive Analysis*. Mathematical Structures in Computer Science, 14, 2004, 815-832. 4, 5, 6, 16

[17] L. Nachbin, *Topology and Order*. Van-Nostrand, Princeton, N.J., 1965. 2, 7, 8

[18] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill Book Comp. 1966, xi+412 pp. 22

[19] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd Edition, Mc Graw-Hill Book Comp. 1991, xv+424. 9

[20] R. Tix, *Stetige Bewertungen auf topologischen R¨aumen*. Diplomarbeit, Technische Universit¨at Darmstadt, June 1995, 51 pp.