دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

منطق شناختی پویای احتمالاتی

نگارش

امیرحسین شرفی

استاد راهنما

دکتر مرتضی منیری

۱۳۹۰

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و بخواهد که بداند

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را پیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته‌ای خواهد که در و اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته‌ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در و راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده‌ی رستگاری.[1]

[1] مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس‌گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که منطق را فطرتاً در وجود آدمی نهاد.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات دکتر منیری در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه قدردانی نمایم.

همچنین جا دارد که تشکری ویژه داشته باشم از دوست عزیزم علی ولی‌زاده، که با همراهی و مساعدت او به فراگیری منطق‌های شناختی پرداختیم و مقالات مرتبط با پایان‌نامه را به دقت مطالعه کرده و مسائل و مشکلات پیش‌آمده را با نویسندگان مقالات در میان گذاشتیم.

و نیز از دکتر رسول رمضانیان، دکتر کویی و دکتر سَک بواسطه‌ی رفع مشکلاتی چند از پایان‌نامه و تمامی اساتیدی که بر پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند بالاخص استاد دکتر محمد مهدی ابراهیمی سپاسگزارم.

در آخر لازم است از آقایان وفا خلیقی (پدیدآورنده‌ی XePersian)، محمود امین‌طوسی، هادی صفی‌اقدم و وحید دامن‌افشان و دیگر دوستانی که در سایت وزین www.parsilatex.com به راهنمایی کاربران TEX می‌پردازند قدردانی نمایم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

امیرحسین شرفی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: شرفی نام: امیرحسین

عنوان: منطق شناختی پویای احتمالاتی

استاد راهنما: دکتر مرتضی منیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: منطق ریاضی

دانشگاه: شهید بهشتی علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۳۰

واژگان کلیدی: منطق شناختی، منطق پویا، منطق احتمالاتی، به‌روزرسانی، Monty Hall

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا نمونه‌ای از منطق‌های شناختی احتمالاتی (PEL) را معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن مدلی ساده از این منطق، در راستای تعمیم آن به منطق‌های پویا که تغییر اطلاعات در سناریوهای چند عاملی را مدل می‌کنند پیش می‌رویم.

پس از توصیف مختصری از منطق‌های شناختی پویای غیر احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL) را نیز با در نظر گرفتن سه گونه‌ی طبیعی احتمال، یعنی احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها، معرفی خواهیم کرد. این سه گونه، شیوه‌ی به‌روزرسانی تعمیم‌یافته‌ای در اختیار می‌گذارند که روشی است مناسب و طبیعی برای مدل‌سازی جریان اطلاعات.

سپس برای اینکه تمامیت منطق شناختی پویای احتمالاتی را با استفاده از تمامیت منطق شناختی احتمالاتی اثبات کنیم، اصول موضوعه‌ی صحیحی ارایه می‌کنیم تا فرمول‌های شامل عملگر پویا را به فرمول‌هایی فاقد این عملگر در زبان ایستای متناظر تحویل کنند.

سرانجام گونه‌ای از منطق شناختی پویای احتمالاتی، مورد نیاز برای حل معمای Monty Hall، ارایه کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم. سپس راه‌حلی صوری برای این معما در این منطق بدست می‌آوریم.

پیش‌گفتار

منطق شناختی احتمالاتی پویا منطقی نسبتاً جدید است که قبل از مطالعه‌ی آن می‌بایست منطق شناختی، منطق شناختی پویا و منطق شناختی احتمالاتی معرفی شده باشد و به فراخور در فصول سه‌گانه به معرفی و توصیف هریک خواهیم پرداخت.

مقدمه را با بهره‌جستن از مقدمه‌ی مقاله‌ی [کویی، ۲۰۰۳b] نگاشتم و البته هر کجا که لازم بود از مقدمه‌های دیگر مقالات نیز استفاده کردم.

در فصل ۱ ابتدا با کمک [دیتمارخ و دیگران، ۲۰۰۷] و [سک، ۲۰۰۷] به خلاصه‌ای از منطق شناختی می‌پردازیم، سپس بر مبنای [فاگین و هالپرن، ۱۹۹۴] منطق شناختی احتمالاتی را که همان منطق شناختی سنتی است به اضافه‌ی توانایی استدلال درباره‌ی احتمال معرفی کرده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم.

فصل ۲ بر اساس [بنتهم و دیگران، ۲۰۰۹] نوشته شده است و به معرفی منطق‌های پویا اعم از شناختی پویا و شناختی پویای احتمالاتی اختصاص دارد. در این فصل پس از معرفی منطق اعلان عمومی و سپس گونه‌ای تا حدی تعمیم یافته از منطق شناختی پویا با در نظر گرفتن مدلی ساده از منطق شناختی احتمالاتی، منطق شناختی پویای احتمالاتی معرفی شده و تمامیت آن اثبات می‌شود. برای آنکه منطق‌های شناختی پویا را احتمالاتی کنیم ابتدا سه گونه‌ی طبیعی احتمال را تعریف می‌کنیم که عبارتند از: احتمال پیشینی جهان‌ها، احتمال رخداد عمل‌ها بر اساس فرایندی متناظر با دیدگاه عامل‌ها و احتمال خطا در مشاهده‌ی عمل‌ها. برای اثبات تمامیت منطق‌های پویا اصول موضوعه‌ای مطرح می‌شود تا بتوان معادل با هر فرمول در این منطق‌ها، با حذف عملگر پویا، فرمولی در منطق‌های ایستا بدست آورد. این اصول اثرات متقابل عملگر پویا با اتم‌ها و عملگرهای بولی و شناختی را توصیف می‌کنند. پس از اثبات صحت، با کمک آنها تمامیت منطق‌های پویا را از تمامیت منطق‌های ایستا نتیجه می‌گیریم.

هنگامی که به همراه ولی‌زاده به مطالعه و اثبات جزئیات مقاله‌ی [بنتهم و دیگران، ۲۰۰۹] مشغول بودیم با مسائل و مشکلاتی برخورد کردیم که به تناسب در بخش‌های مختلف فصل ۲ با عنوان ملاحظه به آنها اشاره خواهم کرد.

فصل ۳ نیز بر گرفته از [کویی، ۲۰۰۳b] است و به منظور ارائه‌ی مثالی برای نشان دادن کاربرد منطق شناختی پویای احتمالاتی نگاشته شده است. مثالی که ارائه می‌شود معمای معروف Monty Hall است که پیش از این مقاله راه‌حلی صوری برای آن داده نشده بود، ولی ما بر اساس این مقاله به راه‌حلی صوری با کمک گونه‌ای از منطق‌های شناختی پویای احتمالاتی دست می‌یابیم که به زیبایی جوابی معقول در اختیار

می‌گذارد. این راه‌حل زیبا را نمی‌توانستم با جزئیات بیان کنم اگر از [کویی، ۲۰۰۳a] استفاده نمی‌کردم و آن را نیافتم مگر با راهنمایی دکتر کویی.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۵۱ فان رایت[۲] کتابی با عنوان «مقاله‌ای در منطق موجهات» [رایت، ۱۹۵۱] منتشر کرد. هینتیکا[۳] با ایده‌هایی که از این مقاله گرفته بود در سال ۱۹۶۲ کتابی با عنوان «دانش و باور، مقدمه‌ای بر منطق مبتنی بر این دو مفهوم» [هینتیکا، ۱۹۶۲] به چاپ رساند. وی در این کتاب به کمک مفهوم جهان‌های ممکن مدلی برای دانش و باور ارائه کرد و به همین دلیل بسیاری او را پدر منطق شناختی می‌دانند. هدف اصلی او واکاوی مفهومی دانش و باور بود ولی پس از او عبارت «شناخت» در محدوده‌ای فراتر به کار گرفته شد، اعم از باور و هر روشی که یک عامل می‌تواند دانشی را بدست آورد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ منطق شناختی مورد توجه دانشمندان فعال در شاخه‌هایی مانند هوش مصنوعی، فلسفه و نظریه بازی‌ها قرار گرفت. در دهه ۸۰ محققین علوم کامپیوتر به منطق شناختی روی آوردند، فاگین[۴]، هالپرن[۵]، موزِز[۶] و وَردی[۷] که از این دسته به حساب می‌آمدند مقالاتی را که در طی حدود ۱۰ سال در مورد منطق شناختی به چاپ رسانده بودند در کتابی با نام «استدلال درباره دانش» [فاگین و دیگران، ۱۹۹۵] جمع آوری کرده و در سال ۱۹۹۵ منتشر کردند.

منطق شناختی، منطقی وجهی است که به استدلال برمبنای دانش[۸] و فرادانش[۹] می‌پردازد، فرادانش دانشی است که عاملی درباره‌ی دانش خود و یا دانش دیگر عامل‌ها دارد. برای روشن شدن موضوع مثالی را با سه بازیکن ۱، ۲ و ۳، و سه کارت قرمز، سفید وآبی در نظر بگیرید. کارت‌ها در میان بازیکنان به این صورت توزیع شده‌اند که قرمز، سفید و آبی به ترتیب در دستان ۱، ۲ و ۳ قرار دارد. فرض کنید بازیکنان تنها کارت خویش را می‌بینند و همه می‌دانند که کارت‌ها به گونه‌ای میانشان توزیع شده است که هریک فقط یک کارت در دست دارند. بوسیله‌ی منطق شناختی می‌توان جملات پیچیده‌ای را مانند «بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۲ نمی‌داند که چه کارتی در دستان بازیکن ۳ است.» صوری کرد. منطق شناخت با چنین فرادانش‌هایی سر و کار دارد. حتی فرادانش‌های پیچیده‌تری مانند همه‌دانی مشترک وجود دارد. برای نمونه در مثال بالا علم به اینکه دقیقاً سه کارت وجود دارد و علم به رنگ کارت‌ها همه‌دانی مشترک

[۲] von Wright
[۳] Hintikka
[۴] Fagin
[۵] Halpern
[۶] Moses
[۷] Vardi
[۸] information
[۹] higher order information

است. منطق شناختی همچنین واکاوی مفهومی خوبی از همه‌دانی مشترک در اختیار می‌گذارد.

اگرچه منطق شناختی آنالیز مناسبی از فرادانش در اختیار می‌گذارد ولی بررسی تغییر دانش خارج از گستره‌ی این منطق است. منطق‌های شناختی پویا منطق شناختی را به گونه‌ای توسیع می‌دهند که استدلال درباره‌ی تغییرات دانش نیز امکان‌پذیر باشد. این توسیع از طرفی از نوعی معناشناسی زبان طبیعی الهام گرفته شد که در آن معنای جمله بعنوان طریقی برای تغییر داده‌های کسانی که آن را می‌شنوند در نظر گرفته می‌شود، و از طرف دیگر از مطالعه‌ی بازی‌ها که تغییر داده‌ها و فرادانش‌ها نقش بسزایی در آنها ایفا می‌کند. سیستم‌های منطقی مختلفی بر این اساس در طول سال‌ها شکل گرفته است که برجسته‌ترین آنها عبارتند از [جرِبرندی و گرونولد، ۱۹۹۷] (الهام گرفته از [ولِتمن، ۱۹۹۶])، [بَتلَگ و دیگران، ۱۹۹۸] و [کِیت، ۲۰۰۲].

در منطق شناختی پویا تغییر وضعیت موجود توسط داده‌های جدید را به‌روزرسانی می‌خوانیم. ساده‌ترین مثال زمانی است که عاملی می‌فهمد که گزاره‌ی φ برقرار است. به‌روزرسانی با یک گزاره در این مثال به این معنی است که گزینه‌هایی که عامل ممکن می‌دانست ولی در آنها گزاره‌ی φ برقرار نیست حذف می‌شوند. در یک سیستم چند عاملی ممکن است عامل‌های مختلف دسترسی مختلفی به داده‌های جدید داشته باشند و همچنین اطلاعات عامل‌ها درباره‌ی دیگر عامل‌ها نقش بازی کند، از این رو می‌توان به‌روزرسانی پیچیده‌تری را در مثال قبل مدل کرد: فرض کنید بازیکن ۱ کارت خود را به بازیکن ۲ نشان دهد و بازیکن ۳ نیز این را ببیند ولی از محتوای کارت خبردار نشود. در نتیجه دانش بازیکنان به این صورت تغییر می‌کند: بازیکن ۲ می‌داند که محتوای کارت بازیکن ۱ چیست، بازیکن ۳ می‌داند که بازیکن ۲ می‌داند محتوای کارت بازیکن ۱ جیست ولی خودش محتوا را نمی‌داند و بازیکن ۱ می‌داند که بازیکن ۳ این را می‌داند.

اگرچه نظریه‌ی احتمال منطق نیست لکن حوزه‌ی مطالعاتی مناسبی برای منطق است، زیرا در بسیاری از حوزه‌های کاربردی به منظور استدلال درباره‌ی دانش، اهمیت توانایی استدلال درباره‌ی احتمال رخدادهای معین به همراه دانش عامل‌ها رخ می‌نماید و اغلب احتمال به عنوان نظریه‌ای برای مدلسازی استدلال مطرح می‌شود. از این رو همه‌ی مقالات منتشر شده در علم اقتصاد که به استدلال درباره‌ی دانش می‌پردازند (که بازگشت می‌کنند به مقاله‌ی اصلی اومان [اومان، ۱۹۷۶]) با ساختاری احتمالاتی مدل می‌شوند، هرچند آنها زبانی منطقی که بصورتی روشن استدلال درباره‌ی احتمال را جایز کند در نظر نگرفته‌اند. با این اوصاف تلاش‌هایی در جهت بیرون کشیدن منطق بعنوان بهترین راه استدلال از دل نظریه‌ی احتمال صورت گرفته است. که یکی از مناسب‌ترین آنها منطق احتمالاتی است که در [فاگین و دیگران، ۱۹۹۰] معرفی شده است.

فصل ۱

منطق‌های شناختی ایستا

۱.۱ منطق شناختی (EL)

منطق شناختی[۱] ابزاری است برای توصیف و تحلیل دانش (knowledge) یا باور (belief) عامل‌ها. این منطق در ابتدا برای تحلیل دانش و کمی بعد برای توصیف باورها به کار گرفته شد[۲]. رابطه‌ی بین دانش و باور کمی ظریف است و اغلب دانش را باور درست در نظر می‌گیرند.

منطق شناختی با استفاده از زبانی صوری به تحلیل دانش و باور می‌پردازد. ابتدا به‌گونه‌ای غیر صوری منظورمان از «منطق» هر آن چیزی است که تحلیل‌های ما را در بر می‌گیرد، و منظورمان از «زبان» مجموعه‌ی دنباله‌هایی از نمادهاست که توسط قواعد زبانی خاصی ایجاد شده‌اند. اما در ادامه به‌صورتی دقیق‌تر به این مفاهیم می‌پردازیم.

منطقی که اکنون ارائه می‌شود مجموعه‌ی غیر تهی $\mathcal{A}$ از عوامل را دربر دارد. پایه‌ای‌ترین خاصیت‌های جهان درباره‌ی آنچه که عامل[۳]ها ممکن است استدلال کنند، مجموعه‌ی غیر تهی $\mathbb{P}$ را تشکیل می‌دهد. اعضای $\mathbb{P}$ را گزاره‌های اتمی می‌نامیم.

۲.۱ زبان شناختی پایه‌ای

زبان شناختی $\mathcal{L}_{EL}$ بر پایه‌ی مجموعه‌ی نمادهای زیر شکل می‌گیرد:

$$\mathbb{P} \cup \{\top, \bot, \neg, \wedge, (,)\} \cup \{\Box_a : a \in \mathcal{A}\}.$$

[۱] Epistemic Logic

[۲] برخی منطق‌ها که بر باورها تأ کید دارند منطق doxastic نامیده می‌شوند، به سبب آنکه ریشه یونانی کلمه‌ی doxastic بر شکل‌گیری عقیده اطلاق می‌کند، در حالی که ریشه یونانی کلمه‌ی epistemic بیشتر در زمینه‌ی فهمیدن و دانش به کار می‌رود.

[۳] agent

برای ایجاد رشته‌ای از نمادها که تشکیل فرمول می‌دهند از قواعد نحوی زیر استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ی فرمول‌ها کوچکترین مجموعه‌ای است که شرایط زیر را داشته باشد:

- نماد $\bot$ و $\top$ و همه‌ی عناصر $p \in \mathbb{P}$ فرمول هستند.
- اگر φ فرمول باشد آنگاه $(\neg\varphi)$ فرمول است، و برای هر $a \in \mathcal{A}$، $(\Box_a\varphi)$ فرمول است.
- اگر φ و ψ فرمول باشند، آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$ نیز فرمول است

معمولاً برای راحتی خارجی‌ترین پرانتز را نمی‌نویسیم. نحو اغلب به شیوه‌ای دیگر بیان می‌شود که فرم Bachus-Naur نامیده می‌شود. با استفاده از این فرم برای بدست آوردن همان فرمول‌هایی که در بالا به‌صورت استقرایی بیان شد می‌توان اینگونه نوشت:

$$\varphi, \psi ::= \ \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a\varphi$$

نماد $\neg$ و $\wedge$ معمولاً عملگرهای بولی اطلاق می‌شوند و $\Box_a$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ عملگرهای شناختی نامیده می‌شوند.

حال معنای شهودی هر فرمول را بیان می‌کنیم. فرمول $\top$ همیشه درست و $\bot$ همیشه غلط است. هر گزاره‌ی اتمی p خاصیتی پایه‌ای از جهان را بیان می‌کند، که یا درست است و یا غلط. فرمول $\neg\varphi$، «نقیض φ» و فرمول $(\varphi \wedge \psi)$، «φ و ψ» خوانده می‌شود. درنهایت به‌ازای هر عامل a، فرمول $\Box_a\varphi$ به‌صورت «a باور دارد φ را» و یا « a می‌داند φ را» خوانده می‌شود. در هر جهان برای هر فرمول یک ارزش درستی مفروض است.

برای آنکه معنای فرمول‌ها را دقیقتر کنیم، نوعی ساختار را که مدل کریپکی[۴] نامیده می‌شود تعریف می‌کنیم. مدل‌های کریپکی که به اقتباس از Saul Kripke نام گرفته‌اند، ساختارهای مرتبطی هستند که در معناشناسی‌های منطق وجهی استفاده می‌شوند. منطق شناخت نوع خاصی از منطق وجهی است.

تعریف ۱.۲.۱. مدل‌های کریپکی مدل کریپکی M سه‌تایی $(S, \xrightarrow{\mathcal{A}}, V)$ است، که مؤلفه‌هایش به این صورت توصیف می‌شوند:

S مجموعه‌ای است که اعضایش وضعیت‌ها یا جهان‌های ممکن نامیده می‌شوند. هر جهان ممکن با وضعیت ممکنی که عاملی با آن مواجه است متناظر می‌شود.

مؤلفه‌ی $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ مجموعه‌ای است از روابط دوتایی $\xrightarrow{a}$ که به‌ازای هر $a \in \mathcal{A}$ روی S تعریف شده‌اند. از نماد $s \xrightarrow{a} t$ استفاده می‌کنیم برای اینکه نشان دهیم $(s, t) \in \xrightarrow{a}$. اگر این روابط دوتایی هم‌ارزی باشند آنها را به‌صورت $\sim_a$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی شامل آنها را $\sim$ می‌نامیم. معمولاً $s \sim_a t$ را به این صورت معنا می‌دهند که عامل a جهان s و t را از هم تمییز نمی‌دهد، یعنی هر دو را یک جهان می‌پندارد، و این تحلیلگر است که می‌داند این دو جهان متفاوتند.

[۴] Kripke Model

در نهایت V تابعی است که هر گزاره‌ی اتمی را به زیرمجموعه‌ای از S می‌نگارد .هر گزاره‌ی اتمی می‌تواند با گزاره‌ای از زبان طبیعی متناظر شود. به‌عنوان مثال گزاره‌ی p را می‌توان به‌صورت «بیرون، هوا بارانی است» خواند، و اگر جهان $s \in S$ در مجموعه‌ی $V(p)$ باشد، ما s را یکی از چند جهان ممکنی در نظر می‌گیریم که در آن وضعیت بارانی بودن بیرون برقرار باشد.

کلاس همه‌ی مدل‌های کریپکی را $\mathbb{K}$ می‌نامیم و مدل‌های کریپکی با رابطه‌ی هم‌ارزی را مدل‌های شناختی می‌نامیم و کلاس این مدل‌ها را به‌صورت $\mathbb{S}5$ نمایش می‌دهیم.

۳.۱ همه‌دانی مشترک

در زبانی که ارایه شد، می‌توان با استفاده از فرمول زیر بیان کرد که همه φ را می‌دانند:

$$\Box\varphi \equiv \bigwedge \{\Box_a\varphi : a \in \mathcal{A}\}$$

البته اغلب، این دانش به این وابسته است که آیا عامل‌ها از این دانشِ متقابل آگاهند یا نه. ما می‌توانیم این موضوع را به این صورت بنویسیم که نه‌تنها همه φ را می‌دانند، بلکه همه می‌دانند که همه φ را می‌دانند:

$$\Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi$$

هرچندکه به بیش از درجه‌ی سه استدلال نمی‌شود و ممکن است گفته شود که اگر

$$\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi,$$

آنگاه φ همه‌دانی مشترک[۵] است اما ما عامل‌هایی را در نظر می‌گیریم که توانایی استدلال ایده‌آلی دارند و درجات دلخواه را در نظر می‌گیرند. از این رو می‌گوییم که φ همه‌دانی مشترک است اگر و فقط اگر $\Box^n\varphi$ برای هر $n \geqslant ۰$، جایی که $\Box^۰\varphi \equiv \varphi$ و برای هر $n \geqslant ۰$، $\Box^{n+۱}\varphi \equiv \Box\Box^n\varphi$. می‌توانیم فرمول همه‌دانی مشترک را به فرم $\Box^*\varphi$ به زبان اضافه کنیم، و معناشناسی‌اش را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

- $M, s \vDash \Box^*\varphi$ اگر و فقط اگر $M, t \vDash \varphi$ برای هر t که برای آن $s \rightarrow^* t$، که در آن $\rightarrow^*$ به‌صورت بستار تراگذری انعکاسی از رابطه‌ی $\bigcup\left\{\xrightarrow{a}: a \in \mathcal{A}\right\}$ تعریف شده است.

همچنین می‌توانیم به همین منوال برای هر مجموعه از عامل‌های $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ فرمول‌هایی را به شکل $\Box^*_{\mathcal{B}}\varphi$ اضافه کنیم، که به‌صورت «φ در میان عامل‌های درون $\mathcal{B}$ همه‌دانی مشترک است» خوانده می‌شود. برای تعریف معناشناسی، کافی است در تعریف معناشناسی $\Box^*\varphi$، $\mathcal{B}$ را جایگزین $\mathcal{A}$ کنیم. همچنین توجه کنید که $\Box^*\varphi$ می‌تواند با فرمول $\Box^*_{\mathcal{A}}\varphi$ جایگزین شود.

[۵] common knowledge

۴.۱ اصول موضوعه وقواعد منطق شناختی

منطق متناظر با اصول موضوعه و قواعد زیر را منطق $\mathcal{K}$ می‌نامیم

تمامی نمونه جانشین‌های همانگو[۶]های گزاره‌ای		(□۱)
توزیع $\Box_a$ روی $\rightarrow$	$\Box_a(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_a\varphi \rightarrow \Box_a\psi)$	(□۲)
قاعده‌ی وضع مقدم[۷]	$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$	(R1)
قاعده‌ی ضرورت[۸] $\Box_a$	$\dfrac{\varphi}{\Box_a\varphi}$	(R2)

قضیه ۱.۴.۱. (صحت اصول موضوعه و قواعد منطق شناختی) اگر $\mathcal{K} \vdash \varphi$ آنگاه $\mathbb{K} \vDash \varphi$؛ اگر $\mathcal{S}5 \vdash \varphi$ آنگاه $\mathbb{S}5 \vDash \varphi$.

برهان. برای اثبات می‌توانید به کتاب [میِر و واندرهوک، ۱۹۹۵] رجوع کنید. □

قضیه ۲.۴.۱. (تمامیت منطق شناختی) اگر $\mathbb{K} \vDash \varphi$ آنگاه $\mathcal{K} \vdash \varphi$؛ اگر $\mathbb{S}5 \vDash \varphi$ آنگاه $\mathcal{S}5 \vdash \varphi$.

برهان. برای اثبات می‌توانید به کتاب [میِر و واندرهوک، ۱۹۹۵] رجوع کنید. □

۵.۱ منطق شناختی احتمالاتی (PEL)

تعریف ۱.۵.۱. زبان شناختی احتمالاتی $\mathcal{L}_{PEL}$. این زبان بر پایه‌ی مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{P}$ از گزاره‌های اتمی، مجموعه‌ی متناهی $\mathcal{A}$ از عامل‌ها، عملگر شناختی K_a و نماد تابعی احتمالاتی $\mathbf{P}_a$ شکل می‌گیرد. فرمول‌های خوش‌تعریف با استفاده از فرم Backus-Naur به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$$

[۶] tautology
[۷] modus ponens rule
[۸] necessitation rule

فصل ۲

منطق‌های شناختی پویا

در این فصل سه منطق شناختی پویا را با این رویکرد مطرح می‌کنیم که برای هریک اصولی موسوم به اصول موضوعه‌ی تحویل[۱] معرفی کرده و با اثبات صحت آنها گامی به سوی تمامیت بر می‌داریم. در انتهای فصل نیز تمامیت را در یک قضیه برای هر سه منطق اثبات خواهیم کرد.

۱.۲ منطق‌های شناختی پویا به منظور به‌روزرسانی غیر احتمالاتی

منطق‌های شناختی پویا جریان اطلاعات ایجاد شده توسط عمل[۲]ها را توصیف می‌کنند. ساده‌ترین عمل آموزنده، و نمونه‌ای رهگشا برای بیشتر این نظریه، اعلان عمومیِ گزاره‌یِ درستی چون A به گروهی از عامل‌هاست، که به‌صورت $A!$ نمایش می‌دهیم. به‌روزرسانی برای عمل‌های پیچیده‌تر می‌تواند برحسب «مدل‌های عمل» توصیف شود، که الگوهای پیچیده‌تری از دسترسی عامل‌ها به عملِ در حال رخداد را مدل می‌کنند. پس ابتدا به‌روزرسانی منطق شناختی توسط اعلان عمومی را بررسی می‌کنیم سپس آن را به حالت کلی‌تر، برای هر نوع عمل، توسیع می‌دهیم.

۱.۱.۲ منطق اعلان عمومی (PAL)

تأثیر پویای اعلان عمومی[۳] A این است که مدل (غیر احتمالاتی) جاری $M = (S, \sim, V)$ را به مدل به‌روز شده‌ی $M|A$ تبدیل می‌کند. این مدل به‌روز شده با تحدید جهان‌های M به جهان‌هایی که A در آنها درست است تعریف می‌شود.

اعلان عمومی معمولاً حاوی اطلاعاتی مفید است. از این رو ممکن است که ارزش درستی عبارات شناختی در نتیجه‌ی اعلان تغییر کند. برای مثال قبل از اعلان A عامل a آن را نمی‌دانست ولی اکنون

[۱] reduction axioms

[۲] event

[۳] public announcement

می‌داند.

تعریف ۱.۱.۲. زبان اعلان عمومی. زبان اعلان عمومی توسط فرم Backus-Naur به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\,\psi$$

فرمول $[!\varphi]\psi$ به‌صورت «ψ پس از اعلان φ برقرار است» خوانده می‌شود. زبان بدست آمده در مدل‌های استاندارد برای منطق شناختی نیز قابل تفسیر است. معناشناسی برای این زبان به غیر از اعلان عمومی همانند تعریف ؟؟ می‌باشد. معناشناسی اعلان عمومی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. معناشناسی اعلان عمومی. فرض کنید مدل شناختی $M = (S, \sim, V)$ داده شده باشد و $s \in S$.

$M, s \vDash [!A]\varphi$ اگر و فقط اگر اگر $M, s \vDash A$ آنگاه $M|A, s \vDash \varphi$

که در آن $M|A$ مدل $(S', \sim', V')$ است به طوری که، با فرض $\llbracket A \rrbracket = \{t \in S \mid M, t \vDash A\}$:

- $S' = \llbracket A \rrbracket$,
- $\sim'_a = \sim_a \cap (S' \times S')$,
- $V'(p) = V(p) \cap S'$.

اصول موضوعه‌ی تحویل در PAL به‌صورت زیر است:

$$[!A]p \leftrightarrow (A \to p) \tag{۱.۲}$$

$$[!A]\neg\varphi \leftrightarrow (A \to \neg[!A]\varphi) \tag{۲.۲}$$

$$[!A](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([!A]\varphi \wedge [!A]\psi) \tag{۳.۲}$$

$$[!A]K_a\varphi \leftrightarrow (A \to K_a[!A]\varphi) \tag{۴.۲}$$

قضیه ۳.۱.۲. (صحت اصول موضوعه‌ی تحویل برای اعلان عمومی)

برهان. با ارجاع به هر اصل اثباتی برای آن می‌آوریم.

(۱.۲)

$$\begin{aligned} M, s \vDash [!A]p \quad &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \Rightarrow M|A, s \vDash p && (۱)\\ &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \Rightarrow M, s \vDash p && (۲)\\ &\Leftrightarrow \quad M, s \vDash A \to p \end{aligned}$$

اگر $M, s \models A$ آنگاه $s \in S'$ و اگر $s \in S'$ آنگاه $V(p) = V'(p)$. در نتیجه از (۱) به (۲) و برعکس می‌توان رسید.

(۲.۲)

$$\begin{aligned} M, s \models [!A]\neg\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad M, s \models A \Rightarrow M|A, s \models \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad M, s \models A \Rightarrow (M, s \models A \text{ و } M|A, s \not\models \varphi) \\ &\Leftrightarrow \quad M, s \models A \Rightarrow M, s \models \neg[!A]\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad M, s \models A \rightarrow \neg[!A]\varphi \end{aligned}$$

□

۲.۱.۲ منطق شناختی پویا ـ به‌روزرسانی مدل‌ها (DEL)

تعریف ۴.۱.۲. مدل عمل[۴]. فرض کنید مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ از عامل‌ها و زبان منطقی $\mathcal{L}$ داده شده باشد، مدل عمل ساختار $A = (E, \sim, pre)$ است بطوری که

- E مجموعه‌ای متناهی و غیر تهی است از عمل‌ها،
- $\sim$ مجموعه‌ای است از روابط هم‌ارزی $\sim_a$ روی E برای هر عامل $a \in \mathcal{A}$،
- pre تابعی است که به هر عمل $e \in E$ فرمولی از $\mathcal{L}$ را نسبت می‌دهد.

تابع پیش‌شرطِ[۵] pre با نسبت دادن فرمول (pre_e) به هر عمل در E معین می‌کند که در کدام جهان‌ها این عمل‌ها ممکن است روی دهند. این مدل‌ها را مدل به‌روزرسانی نیز می‌نامند.

این مدل‌ها بسیار شبیه مدل‌های شناختی هستند، با این تفاوت که به‌جای دانش‌های مربوط به وضعیت‌های ثابت، دانش درباره‌ی عمل‌ها مدل شده است.[۶] روابط تمییز ناپذیری $\sim$ روی عمل‌ها ابهام درباره‌ی اینکه چه عملی واقعاً رخ داده است را مدل می‌کنند. $e \sim_a e'$ می‌تواند به این صورت خوانده شود که «اگر فرض شود که عمل e رخ داده است رخداد عمل e' با دانشِ a سازگار است».

اعلان عمومی $[!\varphi]$ نیز خود به نوعی یک مدل عمل است که در آن $E = \{!\}$ و $\sim = \{(!, !)\}$ و $pre = \{(!, \varphi)\}$.

---

[۴] event model

[۵] precondition function

[۶] کلمه‌ی «عمل» ترجمه‌ای است از کلمه‌ی event، از آنجایی که این کلمه علاوه بر منطق شناختی پویا در نظریه احتمالات نیز استفاده می‌شود، باید دانست که با تفسیرهای متفاوتی در این دو مقوله به کار می‌رود. در نظریه احتمال، event آن است که در منطق بدان گوییم گزاره. در حالی که یک event در منطق شناختی پویا به همراه گزاره‌ی پیش‌شرط ایجاد می‌شود، ولی در واقع eventهای مدلِ عمل، مدلِ شناختی داده شده را تغییر می‌دهند و خود بخشی از مدل نیستند. از این پیچیده‌تر، گاهی اوقات به تمام مدل عمل، یک event اطلاق می‌شود.

نتیجه‌ی رخداد یک عمل نمایش داده شده با A در وضعیت نمایش داده شده با M برحسب ساختاری ضربی مدل می‌شود.

۲.۲ منطق شناختی پویای احتمالاتی (PDEL)

برای اینکه بتوانیم به گونه‌ای صریح و شفاف در باب تغییر داده‌های احتمالاتی در قالبی شناختی_ پویا استدلال کنیم، می‌بایست منطق شناختی احتمالاتی موجود را به‌وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی تحویل مناسب توسعه دهیم. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این کار را بر مبنای معناشناسی مدل‌های عمل احتمالاتی، که معرفی خواهد شد، انجام داد.

تعریف ۱.۲.۲. زبان شناختی پویای احتمالاتی. زبان شناختی پویای احتمالاتی به فرم Backus-Naur به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\varphi,\psi ::= \ \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\psi \mid K_a\varphi \mid [A,e]\varphi \mid \sum_{i=1}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i)\geq r$$

با همان نمادگذاری منطق شناختی احتمالاتی، علاوه بر آن A مدل عمل احتمالاتی و e عملی از آن می‌باشد. فرمول‌هایی که پیش‌شرط‌ها را در مدل احتمالاتی عمل تعریف می‌کنند از همین زبانی که معرفی شد می‌آیند.

در این زبان علاوه بر خلاصه‌نویسی‌های پیش‌گفته خلاصه‌نویسی‌های زیر نیز مطرح است:

$$\langle A,e\rangle\psi : \quad \neg[A,e]\neg\psi$$

و به منظور اینکه پیش‌شرط‌ها را در یک شئ از زبان فرموله کنیم قرار می‌دهیم

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi\in\Phi, pre(\varphi,e)>0} \varphi \tag{۵.۲}$$

ملاحظه ۲.۲.۲. در مقاله‌ی [بنتهم و دیگران، ۲۰۰۹]، $pre_{A,e}$ به‌صورت زیر مطرح شده است:

$$pre_{A,e} : \bigvee_{\varphi\in\Phi, pre(\varphi,e)\geq 0} \varphi \tag{۶.۲}$$

این تعریف معادل است با $\bigvee_{\varphi\in\Phi}\varphi$ زیرا $pre(\varphi,e)$ تابع احتمال است و همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

به دلایلی که مطرح می‌شود تعریف ۵.۲ طبیعی‌تر به نظر می‌رسد. اولاً $pre_{A,e}$ به‌عنوان پیش‌شرط e مطرح است پس باید شامل پیش‌شرط‌هایی باشد که به e احتمال مثبت نسبت می‌دهند، ثانیاً اگر برای هر پیش‌شرط φ داشته باشیم $pre(\varphi,e)=0$ می‌توان $pre_{A,e}$ را تعریف کرد $\bot$ که از دو جنبه‌ی زیر قابل دفاع است:

- از منظر جبری وقتی ترتیب به‌وسیله‌ی استلزام روی فرمول‌ها تعریف شده باشد داریم $\bigvee \phi = \bot$.
- از نقطه نظر منطقی از آنجایی که منظور ما از $pre(\varphi, e)$ احتمال رخداد e است وقتی φ برقرار است، زمانی که برای هر $\varphi \in \Phi$ داریم $pre(\varphi, e) = ۰$، e از جهت احتمالاتی امکان وقوع ندارد، بنابراین اگر ما $pre_{A,e}$ را قرار دهیم $\bot$ از برقراری پیش‌شرط‌های e جلوگیری به عمل آورده‌ایم و از این رو اجازه نمی‌دهیم e رخ دهد.

فصل ۳

معمای Monty Hall

این فصل اختصاص یافته به بررسی مسأله‌ای دشوار، مشهور به معمای *Monty Hall*، با کمک منطق شناختی پویای احتمالاتی. همانطور که در بخش ؟؟ مطرح شد تنها دو گونه از سه گونه احتمالی که معرفی شد در به‌روزرسانی در این معما کافی است و همچنین تنها عملی که در آن رخ می‌دهد اعلان عمومی است. از این رو می‌توانیم منطق را به همان دو گونه از احتمال و اعلان عمومی محدود کنیم ولی کمی از سادگی مدل‌های ایستا و پویای آن بکاهیم و بنابراین برای حل این معما یک منطق اعلان عمومی احتمالاتی را به گونه‌ای معرفی می‌کنیم که مدل‌های ایستای آن مدل‌های کریپکی احتمالاتی باشند.

۱.۳ منطق اعلان عمومی احتمالاتی (PPAL)

مدل‌های شناختی احتمالاتی معرفی شده در فصل ۱ را به یاد بیاورید، در مدل کریپکی احتمالاتی که در اینجا معرفی می‌کنیم فضای احتمالاتی که به هر عامل $a \in \mathcal{A}$ در هر جهان $s \in S$ تخصیص می‌دهیم به‌صورتی است که فضای نمونه یعنی $S_{a,s}$ هر زیرمجموعه‌ی دلخواهی از S می‌تواند باشد ولی σـ جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر ($\mathcal{F}_{a,s}$) همواره مجموعه‌ی توانی فضای نمونه است. همچنین چون تمامی زیرمجموعه‌های تک عضوی از فضای نمونه در σـ جبر قرار می‌گیرند، می‌توان اندازه‌ی احتمالاتی را مستقیماً روی فضای نمونه تعریف کرد و در نتیجه تعریف مدل‌های کریپکی احتمالاتی به‌صورت زیر در می‌آید:

تعریف ۱.۱.۳. مدل‌های کریپکی احتمالاتی. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ی عامل‌ها و $\mathbb{P}$ مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی باشد. مدل کریپکی احتمالاتی ساختار $M_{PKL} = (S, \xrightarrow{\mathcal{A}}, P, V)$ است بطوریکه

- S مجموعه‌ای است غیر تهی از جهان‌های ممکن،
- $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ مجموعه‌ای است از روابط دسترسی $\xrightarrow{a}$ که به‌ازای هر $a \in \mathcal{A}$ روی S تعریف شده‌اند،

- $P : \mathcal{A} \to (S \to (S_{a,s} \to [۰, ۱]))$، تابعی احتمالاتی روی $S_{a,s}$ به هر عامل $a \in \mathcal{A}$ و هر جهان $s \in S$ نسبت می‌دهد (احتمالی که به t توسط تابعی که به a در s مربوط شده است نسبت داده می‌شود به‌صورت $P_a(s)(t)$ نمایش داده می‌شود)،
- V به هر گزاره‌ی اتمی مجموعه‌ای از جهان‌ها نسبت می‌دهد

مجوعه‌ی همه‌ی مدل‌های کریپکی احتمالاتی را $\mathbb{M}_{PKL}$ می‌نامیم. برای هر زیرمجموعه‌ی E از $S_{a,s}$ از آنجا که مجموعه‌های اندازه‌پذیر زیرمجموعه‌های $S_{a,s}$ هستند، داریم:

$$P_a(s)(E) = \sum_{t \in E} P_a(s)(t)$$

و برای هر فرمول φ در زبان تعریف می‌کنیم:

$$P_a(s)(\varphi) = \sum_{\{v \in S_{a,s} | M,v \vDash \varphi\}} P_a(s)(t)$$

تعریف ۲.۱.۳. زبان اعلان عمومی احتمالاتی $\mathcal{L}_{PPAL}$. این زبان بر پایه‌ی مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{P}$ از گزاره‌های اتمی، مجموعه‌ی متناهی $\mathcal{A}$ از عامل‌ها، عملگر کریپکی $\Box_a$، عملگر به‌روزرسانی $[.]$ و نماد تابعی احتمالاتی $\mathbf{P}_a$ شکل می‌گیرد. فرمول‌های خوش‌تعریف با استفاده از فرم Backus-Naur به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varphi, \psi ::= \top \mid \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box_a\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid \sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$$

که در آن $p \in \mathbb{P}$، $a \in \mathcal{A}$ و $r_۱, \ldots, r_n, r \in \mathbb{Q}$. $\sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i)$ یک نام از زبان $\mathcal{L}_{PPAL}$ خوانده می‌شود، و $\sum_{i=۱}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$ فرمول a–احتمالاتی از $\mathcal{L}_{PPAL}$ نامیده می‌شود. قرار دهید Γ_{PPAL} مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های خوش‌تعریف و $P_{a,\mathcal{L}_{PPAL}}$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمول‌های a–احتمالاتی از زبان $\mathcal{L}_{PPAL}$ باشد، و $T_{\mathcal{L}_{PPAL}}$ را نیز مجموعه‌ی همه‌ی نام‌ها قرار دهید. اگر از این زبان عملگر به‌روزرسانی را حذف کنیم آن را $\mathcal{L}_{PKL}$ می‌نامیم.

علاوه بر همه‌ی خلاصه‌نویسی‌های پیش‌گفته‌ی قابل بیان در این زبان، از آنجا که عملی غیر از اعلان عمومی در این زبان مطرح نیست برای سادگی نوشتار از $[\varphi]\psi$ به جای $[!\varphi]\psi$ به‌عنوان خلاصه‌نویسی استفاده می‌کنیم.

به منظور تعبیر این زبان می‌بایست به طور همزمان دو تعریف مطرح شود، یکی تعریف راستی و دیگری تعریف مدل‌های به‌روز شده. این دو تعریف به یکدیگر وابسته‌اند ولی به دور نمی‌انجامد.

تعریف ۳.۱.۳. معناشناسی منطق اعلان عمومی احتمالاتی. درستی فرمول $\varphi \in \Gamma_{\mathcal{L}_{PPAL}}$ در $s \in S$ در مدل کریپکی احتمالاتی M با نماد $M, s \vDash \varphi$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$M, s \vDash p$	اگر و فقط اگر	$s \in V(p)$
$M, s \vDash \neg\varphi$	اگر و فقط اگر	$M, s \nvDash \varphi$
$M, s \vDash \varphi \wedge \psi$	اگر و فقط اگر	$M, s \vDash \varphi$ و $M, s \vDash \psi$
$M, s \vDash \Box_a \varphi$	اگر و فقط اگر	برای هر $v \in S$، اگر $s \xrightarrow{a} v$، آنگاه $M, v \vDash \varphi$
$M, s \vDash [A]\psi$	اگر و فقط اگر	$M\|A, s \vDash \psi$ (تعریف ؟؟ را ببینید)
$M, s \vDash \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$	اگر و فقط اگر	$\sum_{i=1}^{n} r_i P_{a,s}(\varphi_i) \geq r$.

۲.۳ معمای Monty Hall

فرض کنید در یک مسابقه‌ی تلویزیونی شرکت کرده‌اید، و باید از میان سه در یکی را انتخاب کنید با این وصف که پشت یکی از آنها اتومبیل است و پشت دو در دیگر دوچرخه. شما دری را انتخاب می‌کنید، مثلاً در شماره ۱، و مجری، که می‌داند پشت هر در چه چیزی نهفته است، دری دیگر را باز می‌کند که پشت آن دوچرخه است، مثلاً در شماره ۳. او از شما می‌پرسد «آیا حاضرید دری که انتخاب کرده‌اید را با در شماره ۲ عوض کنید؟». سؤال اینجاست که عوض کردن در به نفع شماست یا نه؟

همانطور که در [کویی، ۲۰۰۳b] آمده است خانم سَوِنت[۱] که مرتباً در کتاب گینس به‌عنوان باهوش‌ترین فرد رکورد داشته است بر این باور است که اگر انتخاب را تغییر دهید در یک سوم موارد دوچرخه می‌برید و در دو سوم موارد اتومبیل. او اینگونه استدلال می‌کند که فرض کنید شما در مرحله‌ی اول دری را انتخاب کردید که پشت آن اتومبیل است، بنابر این شما نباید انتخابتان را تغییر دهید و این در یک سوم موارد اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر فرض کنید که انتخاب اولیه‌ی شما دری باشد که پشتش دوچرخه است، که در دو سوم موارد رخ می‌دهد. مجری نمی‌تواند دری که پشتش اتومبیل است و دری که شما انتخاب کرده‌اید را باز کند او مجبور است در دیگری را که پشتش دوچرخه است باز کند. بنابراین در حالتی که شما ابتدا دری را انتخاب کرده‌اید که پشتش دوچرخه است تغییر انتخاب، بردن ماشین را تضمین می‌کند. پس با تغییر انتخاب در دو سوم موارد برنده‌ی اتومبیل خواهید شد.

می‌خواهیم به کمک اثباتی صوری در PPAL نشان دهیم که تعویض در به نفع شماست و مدعای خانم سَوِنت را اثبات کنیم.

[۱] Savant

قبل از آن به چند لم نیازمندیم که آنها را در اینجا اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. $\mathbf{P}_a(\varphi) = ۱ - \mathbf{P}_a(\neg\varphi)$

برهان. از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم $\mathbf{P}_a(\top \wedge \varphi) + \mathbf{P}_a(\top \wedge \neg\varphi) = \mathbf{P}_a(\top)$ و با استفاده از احتمال راستی حکم برقرار است. □

لم ۲.۲.۳. در فرمول $\sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$، اگر داشته باشیم $\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$، که در آن $۱ \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$\sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r'$$

برهان. از فرضیات و با استفاده از خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و اصل 0ــ نام‌ها داریم

$$r_۱\mathbf{P}_a(\varphi_۱) + \cdots + r_j\mathbf{P}_a(\varphi_j) + \cdots + r_n\mathbf{P}_a(\varphi_n) \geq r$$

$$0\mathbf{P}_a(\varphi_۱) + \cdots - \mathbf{P}_a(\varphi_j) + \cdots + 0\mathbf{P}_a(\varphi_n) = -r'$$

سپس با استفاده از اصل افزودن، حکم قضیه اثبات می‌شود. □

لم ۳.۲.۳. در فرمول $[\varphi]\sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r$، اگر داشته باشیم $[\varphi]\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r'$، که در آن $۱ \leq j \leq n$ و r' عددی گویا باشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد:

$$[\varphi]\sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow [\varphi]\sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r - r_jr'$$

برهان. فرض کنید $\mathbf{P}_a(\varphi) > 0$ آنگاه هم‌ارزی‌های زیر با استفاده از اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ برقرارند:

$$[\varphi]\sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_i) \geq r\mathbf{P}_a(\varphi)$$

$$[\varphi]\mathbf{P}_a(\varphi_j) = r' \leftrightarrow \mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_j) = r'\mathbf{P}_a(\varphi)$$

حال با استفاده از لم ؟؟ و خلاصه‌نویسی فرمول‌ها بدست می‌آوریم

$$[\varphi]\sum_{i=۱}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi_i) \geq r \leftrightarrow \sum_{i=۱, i\neq j}^{n} r_i\mathbf{P}_a(\varphi \wedge [\varphi]\varphi_i) \geq (r - r_jr')\mathbf{P}_a(\varphi)$$

و در نتیجه اصل به‌روزرسانی احتمال ۱ حکم را نتیجه می‌دهد. برای حالت $\mathbf{P}_a(\varphi) = 0$ نیز مشابه همین استدلال با کمک اصل به‌روزرسانی احتمال ۲ برقرار است. □

اکنون به مدل‌سازی معما در دستگاه منطقی‌مان می‌پردازیم و سپس به اثبات مدعا روی می‌آوریم.

مجموعه‌ی عامل‌ها را $A = \{c, m\}$ می‌گیریم (c معرف شرکت‌کننده و m معرف مجری) و مجموعه‌ی گزاره‌های اتمی را اجتماع سه مجموعه‌ی A، C و O. بطوریکه
$A = \{A_۱, A_۲, A_۳\}$ که در آن A_i یعنی اتومبیل پشت در شماره i است.
$C = \{C_۱, C_۲, C_۳\}$ که در آن C_i یعنی شرکت‌کننده ابتدا در شماره i را انتخاب کرده است.
$O = \{O_۱, O_۲, O_۳\}$ که در آن O_i یعنی در شماره i توسط مجری باز شده است.

اکنون قواعد بازی را مدل می‌کنیم. این قواعد به این شرح هستند که: تنها یک اتومبیل پشت درهاست، شرکت‌کننده تنها می‌تواند یک در را انتخاب کند و مجری تنها می‌تواند یک در را باز کند.

$$onecar \ = \oplus A, \quad onechoice \ = \oplus C, \quad oneopen \ = \oplus O$$

که $\oplus$ یعنی «یای انحصاری[۲]». فرض می‌کنیم که شرکت‌کننده می‌بایست به اینکه اتومبیل پشت دری خاص قرار دارد احتمال $\frac{۱}{۳}$ نسبت دهد. همچنین فرض می‌کنیم شرکت‌کننده با انتخاب یک در چیزی در مورد جایگاه اتومبیل کشف نمی‌کند. بنابراین شرکت‌کننده بعد از انتخاب در نیز می‌بایست این احتمال را همان $\frac{۱}{۳}$ در نظر بگیرد، یعنی انتخاب شرکت‌کننده مستقل است از جایی که اتومبیل قرار دارد.

$$equal \ = \bigwedge_{i \in \{۱,۲,۳\}} \mathbf{P}_c(A_i) = \frac{1}{3}, \qquad independentAC \ = \bigwedge_{j \in \{۱,۲,۳\}} [C_j] equal$$

بخش اساسی بررسی این معما آن است که ببینیم تحت چه شرایطی مجری دری را باز می‌کند. او دقیقاً یک در را باز می‌کند به شرطی که شرکت‌کننده آن را انتخاب نکرده باشد و اتومبیل نیز پشت آن نباشد.

$$conditions = \bigwedge_{i,j \in \{۱,۲,۳\}} [C_i](O_j \leftrightarrow (\neg A_j \wedge \neg C_j \wedge \bigwedge_{k \in \{۱,۲,۳\}, k \neq j} \neg O_k))$$

حال قرار دهید

$$initial = \ onecar \wedge onechoice \wedge oneopen \wedge equal \wedge independentAC \wedge conditions$$

سئوال این است که شرکت‌کننده انتخاب خود را تغییر دهد یا نه:

$$switch = \ [C_۱][O_۳]\mathbf{P}_c(A_۱) \leq \mathbf{P}_c(A_۲)$$

اگر این جمله درست باشد، احتمال اینکه شرکت‌کننده ماشین را ببرد با تغییر در انتخاب کاهش نمی‌یابد. معلوم می‌شود که $initial$ برای بدست آوردن این نتیجه کفایت نمی‌کند. آنچه ضروری است آن است که شرکت‌کننده از برقراری شرایط اولیه‌ی بازی مطمئن باشد: $\mathbf{P}_c(initial) = 1$. ما همچنین به دو فرض طبیعی نیز نیاز داریم، اولاً از نظر شرکت‌کننده احتمال اینکه او در شماره ۱ را انتخاب کند بزرگتر

[۲] exclusive or

از صفر است: $\mathbf{P}_c(C_۱) > 0$ ثانیاً بعد از اینکه شرکت‌کننده در شماره ۱ را انتخاب کرد از نظر او احتمال اینکه مجری در ۳ را باز کند بزرگتر از صفر است: $[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳) > 0$. اینها برای بدست آوردن $switch$ کفایت می‌کنند.

فرض $independentAc$ دلالت دارد بر اینکه $[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۱) = \frac{1}{3}$ و بنابراین:

$$\mathbf{P}_c(A_۱) = \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) + \mathbf{P}_c(\neg O_۳ \wedge A_۱) \;\Rightarrow\; [C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) \leq \frac{1}{3} \tag{۱.۳}$$

با در نظر گرفتن شرایط $conditions$، $onechoice$ و $onecar$ خواهیم داشت:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲ \to O_۳) = 1 \tag{۲.۳}$$

زیرا از شرایط $onechoice$ و $onecar$ داریم

$$C_۱ \leftrightarrow \neg C_۱ \wedge \neg C_۳ \quad \text{و} \quad A_۲ \leftrightarrow \neg A_۱ \wedge \neg A_۳$$

و در نتیجه

$$C_۱ \wedge A_۲ \to \neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \tag{۱}$$

از طرف دیگر بنابر شرط $conditions$ داریم $[C_۱]O_۱ \to [C_۱]\neg C_۱$. از این و از $C_۱ \to [C_۱]C_۱$ نتیجه می‌شود $C_۱ \wedge O_۱ \to \perp$ که معادل است با

$$\neg C_۱ \vee \neg O_۱ \tag{۲}$$

و به همین صورت داریم

$$\neg A_۲ \vee \neg O_۲ \tag{۳}$$

پس با استفاده از (۱)، (۲) و (۳) بدست می‌آید

$$C_۱ \wedge A_۲ \to \neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \wedge \neg O_۱ \wedge \neg O_۲$$

و از قاعده‌ی ضرورت $[C_۱]$ داریم

$$[C_۱](C_۱ \wedge A_۲) \to [C_۱](\neg C_۳ \wedge \neg A_۳ \wedge \neg O_۱ \wedge \neg O_۲)$$

و از شرط $conditions$ نتیجه می‌شود $[C_۱](C_۱ \wedge A_۲) \to [C_۱]O_۳$ که به خاطر اصل ثبات اتم معادل است با

$$C_۱ \to (A_۲ \to O_۳)$$

در نتیجه داریم $[C_۱]C_۱ \to (A_۲ \to O_۳)$ و بنابراین $C_۱ \to [C_۱](A_۲ \to O_۳)$ و

$$C_۱ \leftrightarrow C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)$$

و با استفاده از قاعده‌ی هم‌ارزی نتیجه می‌شود

$$\mathbf{P}_c(C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)) = \mathbf{P}_c(C_۱)$$

و چون طبق اصل به‌روزرسانی_احتمال ۱ داریم

$$\mathbf{P}_c(C_۱) > 0 \to ([C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲ \to O_۳) = 1 \leftrightarrow \mathbf{P}_c(C_۱ \wedge [C_۱](A_۲ \to O_۳)) = \mathbf{P}_c(C_۱))$$

گزاره‌ای که به دنبالش بودیم اثبات می‌شود.

حال با استفاده از ۲.۳ بدست می‌آید:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲) \tag{۳.۳}$$

زیرا از لم ۱.۲.۳ می‌دانیم

$$\mathbf{P}_c(A_۲ \wedge \neg O_۳) = 0$$

و از اصل جمع‌پذیری متناهی داریم

$$\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) + \mathbf{P}_c(\neg O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲)$$

پس با استفاده از لم ۲.۲.۳ بدست می‌آید

$$\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \mathbf{P}_c(A_۲)$$

و سپس قاعده‌ی ضرورت $[C_۱]$ حکم را اثبات می‌کند.

(۳.۳) به همراه $[C_۱]\mathbf{P}_c(A_۲) = \frac{1}{3}$ (که از $independentAC$ بدست می‌آید) و با استفاده از لم ۳.۲.۳ ما را مجاز می‌کند که نتیجه بگیریم $[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲) = \frac{1}{3}$. حال خلاصه‌نویسی فرمول‌ها و لم ۳.۲.۳ (قرار دهید $r_j = ۱$، $r' = \frac{1}{3}$ و $r = ۰$) و (۱.۳) نتیجه دهد:

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۱) \leq \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge A_۲)$$

و با استفاده از اصل ثبات اتم خواهیم داشت

$$[C_۱]\mathbf{P}_c(O_۳ \wedge [O_۳]A_۱) \leq \mathbf{P}_c(O_۳ \wedge [O_۳]A_۲) \tag{۴.۳}$$

و در نهایت اثبات می‌شود

$$[C_۱][O_۳]\mathbf{P}_c(A_۱) \leq \mathbf{P}_c(A_۲) \tag{switch}$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احتمال	probability
احتمال پسینی	posterior probability
احتمال پیشینی	prior probability
احتمال رخداد	occurrence probability
احتمال گزاره‌ای	propositional probability
احتمال مشاهده‌محور	observation probability
اصل موضوع	axiom
اصول موضوعه‌ی تحویل	reduction axioms
اعلان عمومی	public announcement
اندازه‌ی احتمالاتی	probability measure
اندازه‌ی احتمالاتی درونی	inner probability measure
ایستا	static
باور	belief
به‌روزرسانی	update

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

agent	عامل
axiom	اصل موضوع
belief	باور
common knowledge	همه‌دانی مشترک
completeness	تمامیت
consistent	سازگار
countably additive	جمع‌پذیر شمارا
distinguish	تمییز دادن
dynamic	پویا
epistemic	شناخت
event	عمل
exclusive or	یای انحصاری
finitely additive	جمع‌پذیر متناهی
formula	فرمول
higher order information	فرادانش
hypochondriac	خودبیمار انگار
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
intropection	خودآگاهی

مراجع

Aumann, R. J. (1976). Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics* 4(6), 1236–1239.

Batlag, A., L. S. Moss, and S. Solecki (1998). The logic of public announcements and common knowledge and private suspicions. In *Proc. TARK'98*, San Francisco, CA, USA, pp. 43–56. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Benthem, J. V., J. Gerbrandy, and B. P. Kooi (2009). Dynamic update with probabilities. *Studia Logica* 93(1), 67–96.

Cate, B. t. (2002). Internalizing epistemic actions. In *Proceedings of the NASSLLI-2002 student session, 1st North American Summer School in Logic, Language and Information, Stanford.*, pp. 109–123.

Ditmarsch, H. v., W. van der Hoek, and B. Kooi (2007). *Dynamic Epistemic Logic* (1st ed.). Springer Publishing Company.

Fagin, R. and J. Y. Halpern (1994). Reasoning about knowledge and probability. *Journal of the ACM* 41(2), 340–367.

Fagin, R., J. Y. Halpern, and N. Megiddo (1990). A logic for reasoning about probabdities. *Inf. Comput.* 87(1), 78– 128.

Fagin, R., J. Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi (1995). *Reasoning About Knowledge.* MIT Press.

Gerbrandy, J. and W. Groeneveld (1997). Reasoning about information change. *Journal of Logic, Language and Information 6*, 147–169.

Hintikka, J. (1962). *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions.* Ithaca, N. Y.: Cornell University Press.

Kooi, B. P. (2003a). *Knowledge, Chance, and Change.* Ph.D. disseration .

Kooi, B. P. (2003b). Probabilistic dynamic epistemic logic. *Journal of Logic, Language and Information* 12(4), 381–408.

Meyer, J.-J. C. and W. V. D. Hoek (1995). *Epistemic Logic for AI and Computer Science.* UK, USA, Australia, South Africa: Cambridge University Press.

Sack, J. (2007). *Adding temporal logic to dynamic epistemic logic.* Ph.D. disseration , Indianapolis, IN, USA. AAI3274928.

Veltman, F. (1996). Defaults in update semantics. *Journal of Logic, Language and Information 25*, 221–261.

Wright, G. H. v. (1951). *An essay in modal logic.* North-Holland Pub. Co., Amsterdam.

Surname: Sharafi Name: Amir Hossein

Title: Probabilistic Dynamic Epistemic Logic

Supervisor: Dr. Morteza Moniri

Degree: Master of Science Subject: Department of Mathematics
Field: Mathematical Logic

Shahid Beheshti University Faculty of Mathematical Sciences

Date: 2011 Number of pages: 30

Keywords: epistemic logic, dynamic logic, probabilistic logic, updat, Monty Hall

Abstract

In this thesis, we first introduce an instance of probabilistic epistemic logics (PEL) and prove its completeness. Then in our approach toward generalization we will consider a simple model of this logic to develop it to dynamic logics which are able to model information changes in multi-agent systems.

After a short description of non-probabilistic dynamic epistemic logics, we also introduce probabilistic dynamic epistemic logic (PDEL) by taking into account three sources of probability, namely, prior probability of states, occurrence probability for events based on a process corresponding to agents' view, and the probability of uncertainty of observing events. This three sources are used to provide a generalized update mechanism that is a natural and convenient format for modeling information flow.

Then in order to prove a completeness of probabilistic dynamic epistemic logic from the completeness of probabilistic epistemic logic we present axioms which are sound to reduce the formulas containing dynamic operators to the formulas in the corresponding static language.

Finally we will introduce a kind of probabilistic dynamic epistemic logic which is adapted to solve the Monty Hall dilemma and will prove its completeness. Then we will obtain a formal solution for this dilemma within this logic.

Shahid Beheshti University

Faculty of Mathematical Sciences

Department of Mathematics

M. Sc. Thesis

Probabilistic Dynamic Epistemic Logic

by

Amir Hossein Sharafi

Supervisor

Dr. Morteza Moniri

2011