

الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
ما كنا لنهتدي لولا  
هدى الله لنا





دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده .....

رساله دکتری

رشته ..... گرایش .....

.....

نگارش

امیرحسین شرفی

استاد راهنما

.....

استادان مشاور

..... و .....

آبان ۱۳۹۷



تقدیم ..... .



## رسیدن، به دانش است و به کردار نیک...

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را بیشتر باید شناختن، آنگاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می باید تا به رسگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیز که آدمی را تواند بودن. و در اول آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته ای خواهد که در اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته ای که در خور او بود نتوان شناخت. و منطق آن علم است که در راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود...

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده ی رسگاری<sup>۱</sup>.

---

<sup>۱</sup> مقدمه ی رساله ی منطق دانشنامه ی علائی، شیخ الرئیس ابن سینا





# سپاسگزاری...

ستایش و سپاس مخصوص خداوند است که هر آنچه به دست آید در سایه عنایت اوست. در آغاز می‌بایست از راهنمایی‌ها و زحمات دکتر..... قدردانی نمایم که با مهربانی و دلسوزی، کاستی‌ها را نادیده گرفته و صبورانه فرصت کسب تجربه در انتخاب موضوع تحقیقاتی دادند و گام به گام در به ثمر نشستن تحقیقات همراهی نمودند.

از دکتر..... بسیار ممنونم که مدت سه ماه از دوره فرصت مطالعاتی را در موسسه..... در شهر..... میزبان من بودند و علاوه بر کارهای تحقیقاتی که انجام شد و به سرانجام رسید، از تجربیات علمی و درس‌های زندگیشان آموختم و میهمان نوازی خاطره‌انگیزی از ایشان به عنوان رییس..... و اساتید و کارکنان موسسه برایم به جا ماند.

از دکتر..... و..... بابت کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده‌شان در حوزه..... که از دوران فرصت مطالعاتی چهارماهه در گروه..... آغاز شده است و مشاوره‌های فراوانی که در زمینه‌های مختلف در اختیارم نهاده‌اند بسیار ممنونم به ویژه آنکه با راهنمایی ایشان مقاله‌ای به ثمر رسید و در کنفرانسی در دانشگاه..... ارائه شد.

همچنین وظیفه خود می‌دانم از دکتر..... که از کلاس‌ها و مشاوره‌های ارزشمندشان بهره برده‌ام و دکتر..... به خاطر تشویق‌ها و راهنمایی‌هایشان در یادگیری.....، که منجر به ایجاد علاقه در من در انتخاب موضوع تحقیقاتی در حوزه..... شد قدردانی نمایم.

به علاوه، می‌بایست مراتب قدردانی خود را از داوران گرامی، دکتر.....،

دکتر .....، دکتر ..... و دکتر ..... اعلام کنم که قبول  
زحمت کردند و داوری رساله را پذیرفتند و در طول سالیان کارشناسی ارشد و دکتری از  
دانششان بهره‌ها برده‌ام.

در آخر لازم است که از همسرم قدردانی ویژه‌ای داشته باشم که در دوران تحصیل  
دکتری همکار و همراهم بوده و جریان زندگی را با سختی‌ها و شیرینی‌هایش پا به پای هم  
پیمودیم. همچنین خانواده خود و همسرم را لایق بالاترین سپاس‌ها می‌دانم که در این مسیر  
از هر گونه کمک و همیاری دریغ نورزیدند.

امیرحسین شرفی  
آبان ۱۳۹۷

## چکیده

در این رساله سعی بر آن است که خواننده پس از مطالعه مختصر پیشینه نظریه کوانتوم در فیزیک که به زبانی ساده بیان می‌شود، با ساختارهای جبری و منطقی که از ریاضیات این نظریه نشأت گرفته‌اند آشنا شده و به گونه‌ای کاربردی ارتباط بین منطق و جبر کوانتمی را دریابد.

**هدف:** هر زمان یک ساختار جبری جدید معرفی می‌شود، یک سوال قابل توجه این است که آیا منطقی وجود دارد که این ساختار یک مدل جبری آن باشد؟ هدف اصلی این رساله معرفی منطق‌های متناظر با جبرهای کوانتمی است و به طور مشخص یافتن منطقی برای جبرهای اثر شبکه است. همچنین در راه رسیدن به این هدف، علاوه بر بررسی ویژگی‌های متنوعی از جبر اثر شبکه، ساختار جبری ضعیف‌تری نیز ارائه می‌شود.

**روش‌شناسی پژوهش:** با مشاهده ساختارهای جبری مشابه، به ویژه شبکه متعامد-پیمانهای،  $MV$ -جبر و  $EMV$ -جبر، از یک طرف نحوه ساخت منطق برای برخی از آنها و از طرف دیگر نحوه معرفی رابط استلزام مناسب، فیلترها و ساختارهای جبری معادل بررسی شده و در رسیدن به نتایج مورد نظر به کار برده شده است.

**یافته‌ها:** ابتدا برخی مفاهیم جبر کوانتومی را آورده سپس با در نظر گرفتن بزرگترین چالش منطق کوانتومی دقیق، یعنی رابط استلزام، رویکردهای مختلف در ساخت دستگاه‌های منطقی را بررسی کرده و یکی از آنها را که انواع رابط استلزام را متحد می‌کند معرفی می‌کنیم. در ادامه، با معرفی مفهوم جدید  $pt$ -استلزام به عنوان مشخص کننده رابط استلزام مناسب برای شبکه‌های برگردان‌دار کراندار، نشان می‌دهیم که رابط استلزام ساساکی بهترین رابط استلزام قابل تعریف روی جبر اثر شبکه است و با استفاده از این رابط استلزام یک رابط استلزام فازی روی جبر اثر شبکه می‌سازیم.

سپس با پیدا کردن ویژگی‌های ساختاری جدید برای جبر اثر شبکه و معرفی جبر اثر شبکه ضعیف، منطق جبر اثر شبکه را با کمک رابط استلزام ساساکی به دست آورده و تمامیت آن را اثبات می‌کنیم.

به علاوه، برای به دست آوردن ساختارهای خارج قسمتی جدید از روی جبر اثر شبکه، برخی از انواع فیلترها را تعریف کرده و با استفاده از تعدادی مثال‌های جدید از جبر اثر شبکه، روابط بین فیلترها را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در چه شرایطی  $MV$ -جبر یا شبکه متعامد-پیمانهای به دست می‌آید.

در نهایت  $EMV$ -جبر اثر تعمیم‌یافته را به عنوان جبری با عمل جزیی معادل با  $EMV$ -جبر معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر  $EMV$ -جبر اثر تعمیم‌یافته یا  $MV$ -جبر اثر است یا می‌تواند در یک  $MV$ -جبر اثر به عنوان ایده‌آل ماکسیمال نشانده شود.

**نتیجه‌گیری:** نتایج حاصل را به این صورت می‌توان خلاصه کرد: بهترین رابط استلزام روی جبر

اثر شبکه همانند شبکه متعامد-پیمانه‌ای دوگان نگاشت ساساکی است، منطقی تمام برای این جبر با استفاده از پیکان ساساکی قابل تعریف است، با استفاده از فیلترها می‌توان ساختارهای خارج قسمتی معادل برخی جبرهای شناخته شده به دست آورد و می‌توان جبرهایی با عملگر جزئی معادل با EMV- جبرها معرفی کرد.

**کلیدواژه‌ها:** منطق کوانتومی دقیق و نادقیق، شبکه متعامد-پیمانه‌ای، منطق جبر اثر شبکه، پیکان ساساکی، فیلتر قوی (خارق العاده، استلزامی، استلزامی مثبت)، MV- جبر اثر، EMV- جبر اثر تعمیم یافته.

## اصالت و مالکیت رساله

این جانب ..... دانش‌آموخته‌ی دکتری رشته ..... دانشکده ..... دانشگاه شهید بهشتی پدیدآور رساله با عنوان ..... با راهنمایی دکتر ..... گواهی و تعهد می‌کنم که بر پایه قوانین و مقررات، از جمله «دستورالعمل نحوه بررسی تخلفات پژوهشی» و همچنین «مصادیق تخلفات پژوهشی» مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری (۲۵ اسفند ۱۳۹۳):

✧ این رساله دستاورد پژوهش این جانب و محتوای آن از درستی و اصالت برخوردار است؛  
✧ حقوق معنوی همه کسانی را که در به‌دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند، رعایت کرده‌ام و هنگام کاربرد دستاورد پژوهش‌های دیگران در آن، با دقت و به‌درستی به آنها استناد کرده‌ام؛

✧ این رساله و محتوای آن را تاکنون این جانب یا کس دیگری برای دریافت هیچ‌گونه مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نکرده‌ایم؛

✧ همه حقوق مادی این رساله از آن دانشگاه شهید بهشتی است و آثار برگرفته از آن با وابستگی سازمانی دانشگاه شهید بهشتی منتشر خواهد شد؛

✧ در همه گام‌های انجام این رساله، هرگاه به اطلاعات شخصی افراد یا اطلاعات سازمان‌ها دسترسی داشته یا آنها را به کار برده‌ام، رازداری و اخلاق پژوهش را رعایت کرده‌ام.

امضا

تاریخ

## حقوق دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۷

این گزارش و همه حقوق مادی و محصولات آن (مقاله‌ها، کتاب‌ها، پروانه‌های اختراع، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها، تجهیزات ساخته شده و مانند آنها) بر پایه «قانون حمایت حقوق مؤلفان و مصنفان و هنرمندان» مصوب سال ۱۳۴۸ و اصلاحیه‌های بعدی آن و همچنین آیین‌نامه‌های اجرایی این قانون» از آن دانشگاه شهید بهشتی است و هرگونه استفاده از همه یا پاره‌ای از آن شامل نقل قول، تکثیر، انتشار، کاربرد نتایج، تکمیل و مانند آنها به صورت چاپی، الکترونیکی یا وسایل دیگر، تنها با اجازه نوشتاری دانشگاه شهید بهشتی شدنی است. نقل قول محدود در انتشارات علمی مانند کتاب و مقاله یا پایان‌نامه‌ها و رساله‌های دیگر با نوشتن اطلاعات کامل کتاب‌شناختی، نیازی به مجوز دانشگاه شهید بهشتی ندارد.



# فهرست مطالب





# فصل ۱

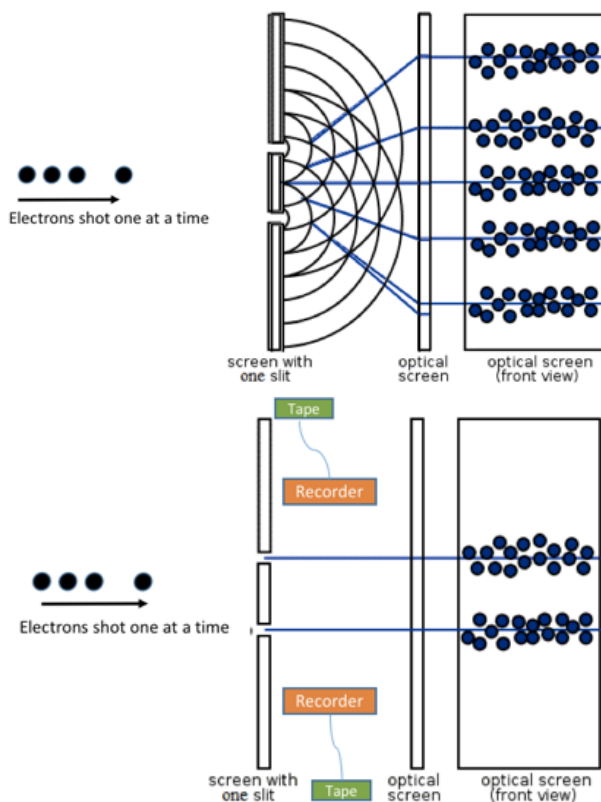
## مقدمات

براساس فرمول‌بندی استاندارد مکانیک کوانتوم مبتنی بر فضای هیلبرت، گزاره‌هایی که حکایت از ویژگی‌های سیستم فیزیکی مورد مطالعه می‌کنند، توسط عملگرهای تصویری نمایش داده می‌شوند. این عملگرهای تصویری تشکیل یک شبکه متعامد-پیمانه‌ای می‌دهند، ساختاری که اولین بار در مقاله مشهور بیرخف<sup>۱</sup> و فون نیومن<sup>۲</sup>، [؟]، به عنوان اصل‌بندی جبری مناسبی از گزاره‌های مرتبط با سیستم مکانیک کوانتومی، معرفی شده است. از این منظر، این جبر همتای جبر بولی است که همین نقش را برای فیزیک کلاسیک ایفا می‌کند.

---

<sup>۱</sup>G. Birkhoff

<sup>۲</sup>J. von Neumann



## ۱.۱ فضای هیلبرت

در این بخش به معرفی اجمالی از فضای هیلبرت می‌پردازیم ولی تنها به ذکر تعاریف مورد نیاز در این پایان‌نامه اکتفا می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. در فضای برداری  $V$ ، عمل دوتایی  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  را ضرب داخلی نامیم هرگاه در

شرایط زیر صدق کند:

$$\langle x, y + \alpha z \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, z \rangle;$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

که در آن  $\langle y, x \rangle^*$  مزدوج  $\langle y, x \rangle$  است.

**تعریف ۲.۱.۱.** در فضای برداری  $V$ ، نگاشت  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  را اندازه گوئیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\|v\| \geq 0;$$

$$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0;$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|;$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

**تعریف ۳.۱.۱.** یک فضای برداری اگر به ضرب داخلی مجهز شده باشد فضای برداری ضرب داخلی و اگر در آن اندازه تعریف شده باشد، فضای اندازه دار نامیده می شود. به علاوه همواره از روی ضرب داخلی به صورت زیر می توان اندازه تعریف کرد:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

بنابراین هر فضای ضرب داخلی یک فضای اندازه دار است ولی برعکس این مطلب لزوما برقرار نیست.

**تعریف ۴.۱.۱.** یک فضای برداری را کامل گوئیم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. در این صورت، فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی است که کامل باشد.

**تعریف ۵.۱.۱.** در فضای برداری  $V$  روی میدان  $F$ ، نگاشت  $T : V \rightarrow V$  را یک عملگر خطی نامیم هرگاه به ازای هر  $\alpha \in F$  و  $x, y \in V$  داشته باشیم:

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y).$$

**تعریف ۶.۱.۱.** اگر عملگر خطی  $T$  را به شکل ماتریس نگاه کنیم، الحاقی آن به صورت  $T^\dagger = (T^*)^t$  تعریف می‌شود که در آن  $*$  درایه‌های ماتریس را مزدوج و  $t$  ماتریس را ترانپوز می‌کند.  $T$  را خودالحاقی یا هرمیتی نامیم هرگاه  $T = T^\dagger$ .

**قرارداد:** نمایش ستونی بردار  $v$  را به صورت  $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  نشان می‌دهند و آن را کت<sup>۳</sup>  $v$  و نمایش سطری  $\langle v| = (v_1^* \ \dots \ v_n^*)$  را برا<sup>۴</sup>ی  $v$  می‌نامند.

**تعریف ۷.۱.۱.** (i) عملگر خطی  $P$  را عملگر تصویرگر گویند هرگاه  $P^2 = P = P^\dagger$ ، یعنی هم خودتوان باشد و هم خودالحاقی. (ii) عملگر خطی  $E$  را عملگر مثبت گویند هرگاه به ازای هر بردار  $v$  داشته باشیم  $\langle v|T|v\rangle \geq 0$ .

اثبات شده است که یک عملگر خودالحاقی است اگر و فقط اگر به ازای هر بردار  $v$  مقدار  $\langle v|T|v\rangle$  حقیقی باشد. در این صورت هر عملگر مثبت یک عملگر خودالحاقی است.

---

<sup>۳</sup>ket

<sup>۴</sup>bera

## فصل ۲

# استلزام‌های اساسی در جبر اثر شبکه

در دو مقاله [؟، ؟] شرایط کمینه استلزام اساسی برای شبکه متعامد-پیمانه‌ای توسط

هاردگری<sup>۱</sup> به صورت زیر به دست آمده است:

$$(E) \quad a \leq b \text{ اگر و فقط اگر } a \rightarrow b = 1$$

$$(MP) \quad a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$$

$$(MT) \quad b' \wedge (a \rightarrow b) \leq a'$$

$$(NG) \quad a \wedge b' \leq (a \rightarrow b)'$$

$$(R) \quad \text{عمل دوتایی } * \text{ وجود دارد که، برای هر } a, b, c, \text{ اگر } a * c \leq b, \text{ و فقط اگر } c \leq a \rightarrow b.$$

در ابتدا به نظر می‌رسد که می‌توانیم این شرایط را به عنوان شرایط کمینه رابط استلزام اساسی در هر شبکه بازگشتی کران‌دار از جمله جبر اثر شبکه در نظر بگیریم. لیکن با وجود اینکه پیکان ساساکی در برخی مقالات از جمله [؟، ؟] به عنوان رابط استلزامی مناسب برای جبر اثر شبکه استفاده شده است، مثال‌های زیر نشان می‌دهد که پیکان‌های ساساکی و دیشکانت، تعریف شده برای جبر اثر شبکه، لزوماً در شرایط (MP)، (MT) و (NG)

---

<sup>1</sup>Hardegree

صدق نمی‌کنند.

مثال ۱۰۰۲. جبر اثر شبکه  $(E; +, \circ, 1)$  را در نظر بگیرید که در آن  $E = \{\circ, a, b, c, d, 1\}$

و  $+$  به صورت زیر تعریف شده است

$+$	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$1$
$\circ$	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$1$
$a$	$a$	$d$	$c$	$1$	$-$	$-$
$b$	$b$	$c$	$-$	$-$	$1$	$-$
$c$	$c$	$1$	$-$	$-$	$-$	$-$
$d$	$d$	$-$	$1$	$-$	$-$	$-$
$1$	$1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

به علاوه ترتیب القا شده در شکل ؟؟ به تصویر کشیده شده است که از آنجا موارد

نقض زیر نتیجه می‌شود:

$$c \wedge (c \rightarrow_d b) \not\leq b$$

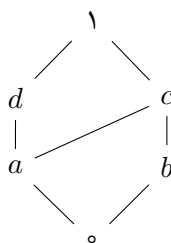
$$c \wedge (c \rightarrow_s b) \not\leq b$$

$$d' \wedge (c \rightarrow_d d) \not\leq c'$$

$$a' \wedge (d \rightarrow_s a) \not\leq d'$$

$$c \wedge a' \not\leq (c \rightarrow_d a)'$$

$$c \wedge a' \not\leq (c \rightarrow_s a)'$$



شکل ۱۰۲:

بنابراین نیاز است تا این شرایط را به شرایطی مناسب برای رابط‌های استلزام اساسی

در شبکه بازگشتی کران‌دار تعمیم دهیم. همان‌طور که از منطق فازی می‌دانیم  $t$ -نرم‌ها

جانشین‌های خوبی برای  $\wedge$  هستند پس می‌توان این شرایط مینیمم را با استفاده از  $t$ -نرم‌ها

به جای ۸ تعمیم داد. به علاوه، می‌توان مفهوم  $t$ -نرم جزیی را برای جبرهای با عملگرهای جزیی تعریف کرد.

**تعریف ۲.۰.۲.** [۹] فرض کنید  $L$  یک شبکه کران‌دار باشد. عملگر دوتایی  $\Delta$  روی  $L$  را  $t$ -نرم روی  $L$  نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

$$1\Delta a = a \quad (\text{i})$$

$$a\Delta b = b\Delta a \quad (\text{ii})$$

$$a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c \quad (\text{iii})$$

$$a\Delta c \leq b\Delta d \quad \text{اگر } a \leq b \text{ و } c \leq d \text{ آنگاه} \quad (\text{iv})$$

**تعریف ۳.۰.۲.** فرض کنید  $L$  یک شبکه کران‌دار باشد. عملگر جزیی دوتایی  $\Delta$  روی  $L$  را  $t$ -نرم جزیی روی  $L$  نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر برقرار باشند:

$$1\Delta a = a \quad (\text{i})$$

$$a\Delta b \text{ اگر } a\Delta b \text{ تعریف شده باشد، آنگاه } b\Delta a \text{ نیز تعریف شده باشد و } a\Delta b = b\Delta a \quad (\text{ii})$$

$$a\Delta(b\Delta c) \text{ و } b\Delta c \text{ اگر } a\Delta(b\Delta c) \text{ تعریف شده باشند، آنگاه } a\Delta b \text{ و } (a\Delta b)\Delta c \text{ نیز تعریف شده} \quad (\text{iii})$$

$$\text{باشند و } a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$$

$$a\Delta c \leq b\Delta d \quad \text{اگر } a \leq b, c \leq d \text{ و } a\Delta c \text{ و } b\Delta d \text{ تعریف شده باشند، آنگاه} \quad (\text{iv})$$





## فصل ۳

# نتیجه گیری و پیشنهادات

نقطه آغازین رساله حاضر مقاله‌ی [؟] بود که در آن ساختار جدید CI – شبکه روی جبر اثر شبکه به عنوان مدلی بالقوه برای منطقی‌نااستاندارد معرفی شده است. در این مقاله عمل‌های ضرب ساساکی، پیکان ساساکی و متمم متعامد، مشتق شده از جبر اثر شبکه، به ترتیب متناظر با عملگرهای عطف، استلزام و نقیض منطق در نظر گرفته شده و با استفاده از این خاصیت که ضرب ساساکی و پیکان ساساکی دوگان یکدیگرند، روابط بین این عمل‌ها بررسی می‌شود.

در ادامه این سیر تحقیقاتی، می‌توان مقاله فولیس و پولمانوا [؟] را، که به معرفی جبرهای شبه اثر شبکه می‌پردازد، مبنا قرار داد و از اینکه دو رابط استلزام با خاصیت مانده‌ای موجود است، منطق زیرساختاری برای این جبر معرفی کرد. به علاوه، از آنجا که برای جبر بول تعمیم یافته منطقی زیرساختاری موجود است، می‌توان ارایه منطقی زیرساختاری برای EMV – جبرها را به عنوان موضوع تحقیقاتی دیگر در نظر گرفت.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Planck's constant	ثابت پلانک
effect algebra	جبر اثر
CI-lattice congruence	همنهشتی CI-مشبکه
CI-lattice	CI-مشبکه
D-ideal	D-ایده‌آل
$\ell$ -group	$\ell$ -گروه
unital $\ell$ -group	$\ell$ -گروه یکه دار



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

effect algebra	جبر اثر
CI-lattice	CI - شبکه
CI-lattice congruence	همنهشتی CI - شبکه
D-ideal	D - ایده‌آل
$\ell$ -group	$\ell$ - گروه
Planck's constant	ثابت پلانک
unital $\ell$ -group	$\ell$ - گروه یکه دار



# فهرست مقاله‌های برگرفته از رساله

مقاله‌ها به ترتیب استفاده در رساله به شرح زیر هستند:

[1] .....

[2] .....

[3] .....

[4] .....

کارگاه‌ها و همایش‌هایی که ارایه مرتبط با رساله داشته‌ام:

[1] .....

[2] .....





..... دانش‌آموخته‌ی دکتری تخصصی رشته ..... از دانشگاه  
..... در گرایش ..... در سال ..... است. او در سال ..... کارشناسی  
ارشد خود را از دانشگاه ..... در رشته ..... گرایش ..... و  
کارشناسی خود را در سال ..... از دانشگاه ..... در رشته .....  
دریافت کرد. زمینه‌های پژوهشی او .....، ..... و  
..... هستند.





## Abstract

In this thesis, after a brief review on a background of quantum theory in physics in simple words, our attempt is the reader get familiar with algebraical and logical structures originated from the mathematics of this theory and comprehend the relation between quantum algebra and logic in a practical way.

**The aim:** Whenever, a new algebraical structure is defined, a significant question arises: is there any logic for which this structure would be an algebraic model? the original goal of this thesis is to introduce the logical systems correspond to quantum algebras and particularly to find a logic for lattice effect algebras. Furthermore, to reach this goal, more than investigating on many properties of lattice effect algebras, we will introduce a weaker algebraic structure.

**The methodology of research:** Observing similar algebraic structures, especially orthomodular lattices, MV-algebras and EMV-algebras, it is investigated, in one hand, the way of constructing the logical systems on some of these algebras, on the other hand, the way of defining implication connective, filters and equivalent algebraic structures. Then these are used to reach the intended results.

**Results:** First, we bring some algebraic quantum concepts as an introduction then considering the biggest challenge in sharp quantum logic, i.e. implication connectives, we will investigate on diverse approaches of constructing logical systems which follows by introducing the one that unifies all kinds of implication connectives.

Further, defining a new concept, pt-implication, as a characterization of a suitable implication connective for bounded involutive lattices, we will show that Sasaki arrow is the best implication definable on lattice effect algebras and, using this connective, we will construct a fuzzy implication on lattice effect algebras.

Then, finding new structural properties for lattice effect algebra and defining a weak lattice effect algebra, we will introduce by Sasaki arrow a logic for lattice effect algebras, and prove its completeness.

Furthermore, to induce new quotient structures on lattice effect algebras, we will define some types of filters. Then, using some new examples of lattice effect algebras, we will investigate on the relations between filters. Additionally, we will show that on which conditions an MV-algebra or orthomodular lattice are drivable from a quotient of lattice effect algebra..

Finally, we will introduce generalized EMV-effect algebras as partial algebraic structures equivalent to EMV-algebras and we show that every generalized EMV-effect algebra is either an MV-effect algebra or can be embedded into an MV-effect

algebra as a maximal ideal.

**Conclusion:** It can be briefly conclude that: as orthomodular lattice, the best implication connective is the duality of Sasaki map, a complete axiomatisation logic using Sasaki arrow is definable for this algebra, from filters it is obtainable quotient structures equivalent to some familiar algebras and, at last, it can be defined a partial algebra equivalent to EMV-algebras.

**Keywords:** Sharap and unsharp quantum logic, orthomodular lattice, logic of lattice effect algebra, Sasaki arrow, strong (fantastic, implicative, positive implicative) filter, MV-effect algebra, generalized EMV-effect algebra.







Shahid Beheshti University

Faculty of .....

*A thesis submitted in fulfillment of the requirements  
for the degree of Doctor of Philosophy*

*in the*

.....

.....

By

**Amir Hossein Sharafi**

Supervisor

.....

Advisors

..... and .....

November, 2018